Renormalització en dinàmica complexa

2010 MSC. 30C62, 30D99, 37F25, 37F45.

Abel Hernández Ruiz **abel.ahr@gmail.com**

28 de setembre de 2018

Resum

La renormalització és una tècnica potent tant en matemàtiques com en física. En particular, és essencial en l'estudi de la conjectura MLC sobre la naturalesa localment connexa del conjunt de Mandelbrot. El propòsit principal d'aquest article és fer un esbós[1] del teorema de redreçament (*the Straightening Theorem*): un resultat fonamental darrere la tècnica abans esmentada. Per tal d'assolir aquest objectiu, es presentaran alguns elements bàsics referents a sistemes dinàmics i de la geometria quasiconforme. A tall de cloenda, s'indagarà en algunes aplicacions referents a la dinàmica complexa en l'espai dels polinomis cúbics.

1 Introducció

L'any 1870, el matemàtic Ernst Schröder (1841 – 1902) va ser el primer a considerar la iteració de funcions complexes dins el context de la dinàmica. Concretament, va encarar la resolució d'equacions fent ús d'algoritmes iteratius i aquest fet va ser l'estímul del mètode de Newton per aproximar arrels de certes funcions. Aquest inici va donar lloc a tot un reguitzell de problemàtiques que van concloure al mateix temps que finalitzava la Primera Guerra Mundial. El treball pioner de Gaston Julia (1893 – 1978) i Pierre Fatou (1878 – 1929), que competien per guanyar *Le Grand Prix des Sciences Mathématiques de 1918*, va ser el començ d'una teoria que va il·luminar els ulls dels matemàtics quan, al voltant de 1980, els ordinadors van revelar la bellesa dels objectes que només podien imaginar les meravelloses ments d'aquests dos genis.

D'aleshores ençà, s'ha desenvolupat una enginyosa teoria dins del marc de la dinàmica complexa i, en el dia d'avui, encara en romanen grans incògnites. Possiblement el problema més famós sense resoldre en aquesta branca de les matemàtiques és una conjectura coneguda com MLC (*Mandelbrot Locally Connected*), que es pregunta si el conjunt de Mandelbrot és localment connex o no. Però, quin és exactament aquest conjunt i com es pot fer front a l'esmentada conjectura?

2 Dinàmica complexa i geometria quasiconforme

La dinàmica de funcions holomorfes definides d'un cert espai a ell mateix pretén entendre la tendència dels iterats d'aquesta dins l'espai donat. En el pla complex, es denota la seqüència per

$$z, f(z), f^2(z), f^3(z), \dots,$$

on $f : U \subset \mathbb{C} \to U$ és a una funció holomorfa donada, $z \in U$ i $f^n(z)$ denota la n-èsima iteració de f a z. Aquesta cadena de valors s'anomena òrbita de z i, per exemple, pot escapar a infinit quan s'incrementa el nombre d'iteracions. Si es considera la família quadràtica $\{Q_c(z) \coloneqq z^2 + c\}_{c\in\mathbb{C}}$, llavors es pot definir K_{z^2+c} com el conjunt de punts tals que la seva òrbita no convergeix a infinit i introduir el conjunt de Mandelbrot $\mathcal{M} \coloneqq \{c \in \mathbb{C} \mid K_{z^2+c} \text{ és connex}\}$ (veure Figura 6). D'una manera més general, donat un polinomi $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, es defineix K_P anàlogament i s'anomena conjunt ple de Julia de P.

Pel que fa a la importància de $\mathcal{M}$, aquesta recau en la seva universalitat, és a dir, la seva presència en forma de còpies holomorfes als espais de paràmetres de certes famílies de funcions aparentment no

[1] Es pot trobar detalladament a [2]: `https://www.slideshare.net/slideshow/embed_code/key/LTRf21te5ZDWVm`.

relacionades amb la quadràtica. I és aquí on entra en joc la conjectura MLC en tant que permetria una descripció topològica completa de $\mathcal{M}$ i, en particular, una parametrització de la seva frontera; un fet de particular rellevància si es té en compte que es tracta d'un objecte amb dimensió de Hausdorff igual a 2. Fins ara s'han provat diverses propietats del conjunt de Mandelbrot. En són un bon exemple la compacitat i la connexitat. Però quant a la connexitat local, que cal provar-la per a cada valor $c \in \mathcal{M}$, s'ha aconseguit demostrar-ne molts casos ara per ara i la tècnica emprada involucra una teoria coneguda com a renormalització.

Abans d'endinsar-s'hi, cal introduir algunes nocions de dinàmica complexa i geometria quasiconforme. Donada una funció holomorfa $f : U \subset \mathbb{C} \to U$ i un punt $z_0 \in U$, es diu que z_0 és un punt fix de f si $f(z_0) = z_0$. Si $f^p(z_0) = z_0$ i $f^q(z_0) \neq z_0$ per un cert $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ i per tot $q \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, el punt z_0 es coneix com a periòdic. Donada una altra funció holomorfa $g : V \subset \mathbb{C} \to V$, té sentit preguntar-se si la dinàmica d'ambdós sistemes dinàmics és la mateixa. Aquesta possibilitat es descriu amb el concepte de conjugació. Es diu que f i g són topològicament conjugades si existeix un homeomorfisme $h : U \to V$ tal que el següent diagrama commuti:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & U \arrow[d, "h"] \\ V \arrow[r, "g"] & V \end{tikzcd}$$

Anàlogament, segons les característiques de h, es diu que ambdues funcions són $\mathcal{C}^r$-conjugades, linealment conjugades, etcètera. Per tant, una conjugació es pot interpretar com un canvi de coordenades que preserva el comportament de les òrbites (e.g. els punts periòdics).

La representació usual de les òrbites es troba al pla dinàmic on, mitjançant un algoritme de temps d'escapament, cada píxel té assignat un color depenent del nombre d'iteracions necessàries per escapar d'una certa regió. Aquesta ha de ser prou gran per a assegurar que l'òrbita del punt corresponent escapa a l'infinit. Així doncs, en el cas dels polinomis es pot il·lustrar clarament el conjunt ple de Julia.

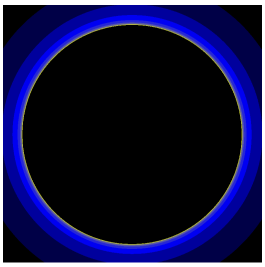

Figura 1: z^2

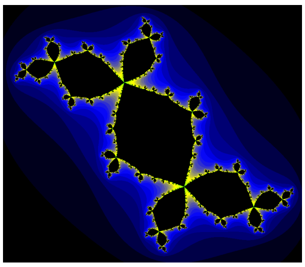

Figura 2: $z^2 - 0.12256 + 0.74486i$

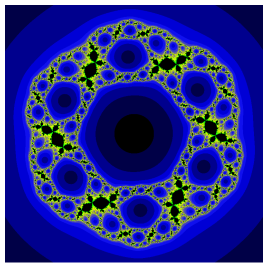

Figura 3: $z^3 + \frac{0.1043+0.054743i}{z^3}$

Si es considera z^2, és palès que $K_{z^2} = \overline{\mathbb{D}}$, on $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Un altre cas conegut és el conill de Douady (veure Figura 2), el nom del qual fa referència al matemàtic francès Adrien Douady (1935 – 2006). Però, què passa si es considera per exemple la funció racional de la Figura 3? Com es pot observar, en el seu pla dinàmic són presents petites còpies del conill de Douady. A què és degut aquest fet? Es tracta d'una mera coincidència? En absolut. De fet, el resultat que justificarà aquest fenomen és precisament el teorema central d'aquest article, peça clau en el món de la renormalització: el teorema de redreçament. A grans trets, la teoria que dona nom a aquesta redacció pretén trobar analogies entre fets locals (regió del pla dinàmic de la funció racional) i globals (conjunt de Julia del polinomi quadràtic donat: conill de Douady). S'explicarà més detalladament als propers capítols.

Quant a geometria quasiconforme, es pot dir que la quasiconformitat és un grau de regularitat que no pot classificar-se en el context de les classes $\mathcal{C}^n$. Tal com s'indicarà en la seva definició, tota funció quasiconforme serà de classe $\mathcal{C}^0$. Tot i això, no serà necessàriament de classe $\mathcal{C}^1$ i, recíprocament, una funció $\mathcal{C}^1$ no tindrà la quasiconformitat com a requisit. Cal recordar, primer, algunes propietats del diferencial d'una funció.

Si es consideren dos dominis (i.e. conjunts oberts i connexos) $U, V \subset \mathbb{C}$ i una funció $\mathbb{R}$-diferenciable $\phi : U \to V$ en un cert punt $z_0 \in U$, aleshores existeix una funció lineal entre els espais tangents a z_0 i

$\phi(z_0)$ que es coneix com a diferencial:

$$D_\phi(z_0) : T_{z_0}U \to T_{\phi(z_0)}V$$
$$(z, \overline{z}) \mapsto \partial_z\phi z + \partial_{\overline{z}}\phi\overline{z}$$

Si $D_\phi(z_0)$ no és singular, llavors $E_{z_0} := (D_\phi(z_0))^{-1}(\mathbb{S}^1)$ és una el·lipse, on $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Si es té en compte aquesta noció per a quasi tots els punts de U, el que s'obté és el que es coneix com a camp d'el·lipses. A cadascuna se li pot associar un nombre complex que identifica la proporció dels seus eixos i la seva inclinació. Aquest valor s'anomena *coeficient de Beltrami*. Si es formalitza, en deriva la següent definició per a una el·lipse amb eix major de longitud M i eix menor de llargària m i argument $\theta \in [0, \pi)$.

$$\mu(E) := \frac{M - m}{M + m} e^{i2\theta}$$

Un camp d'el·lipses $E_u \subset T_uU$ definides tret de la seva escala per quasi tot punt $u \in U$ i tals que la funció $u \mapsto \mu(u) := \mu(E_u)$ de U a $\mathbb{D}$ sigui mesurable en sentit Lebesgue es coneix com a estructura quasicomplexa. Com es pot observar, el coeficient de Beltrami μ la identifica perfectament. L'estructura més senzilla és la que es coneix com a estàndard. Aquesta s'obté considerant una circumferència en cada pla tangent i s'acostuma a denotar per μ_0 ($\mu \equiv 0$). De fet, mitjançant l'aplicació diferencial $D_\phi(u)$ gairebé per a tot punt de $u \in U$, l'estructura estàndard μ_0 proporciona una nova estructura quasicomplexa que es denotarà per μ_ϕ. Es diu que μ_ϕ és el *pullback* de μ_0 per ϕ i s'escriu $\mu_\phi(u) = \phi^*\mu_0(u)$ per a gairebé tot $u \in U$. Aquest concepte pot generalitzar-se encara més, ja que, en comptes de partir de l'estructura estàndard, podria haver-se considerat una estructura μ qualsevol. Una possibilitat a valorar és que μ sigui invariant sota un *pullback*, i.e. $\phi^*\mu = \mu$.

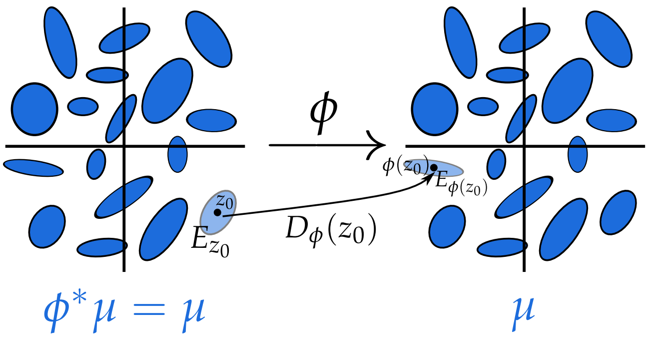

Figura 4: Coeficient de Beltrami ϕ-invariant.

A continuació, ja es pot introduir la definició analítica de quasiconformitat i un parell de resultats essencials.

Definició 2.1. (Funció quasiconforme) *Una funció $\phi : U \to V$ entre dos dominis $U, V \subset \mathbb{C}$ és K-quasiconforme ($K \geq 1$) si i només si*

- *ϕ és un homeomorfisme;*
- *ϕ és absolutament contínua sobre línies;*
- *$|\partial_{\overline{z}}\phi| \leq k|\partial_z\phi|$ gairebé a tot arreu, on $k := (K - 1)/(K + 1)$.*

Tot i que no s'entrarà en detall, com que ϕ és una funció oberta pel fet de ser un homeomorfisme i també és absolutament contínua sobre línies, se sap que serà $\mathbb{R}$-diferenciable gairebé a tot U. A més, es compleix la desigualtat $\det(D_\phi(u)) > 0$. Per això, el *pullback* ϕ^* estarà ben definit quan ϕ sigui quasiconforme.

Teorema 2.1. (Teorema d'integrabilitat) *Si $U \subset \mathbb{C}$ és un conjunt conformement equivalent a $\mathbb{D}$ (resp. $\mathbb{C}$) dotat d'una estructura quasicomplexa μ tal que $||\mu||_\infty = k < 1$, aleshores existeix un homeomorfisme quasiconforme $\phi : U \to \mathbb{D}$ (resp. $\phi : U \to \mathbb{C}$) tal que $\mu = \phi^*\mu_0$. A més, ϕ és únic tret de post-composicions amb automorfismes de $\mathbb{D}$ (resp. $\mathbb{C}$).*

Lema 2.1. (Lema de Weyl) *Si ϕ és 1-quasiconforme, llavors és conforme. Equivalentment, si ϕ és quasiconforme i $\partial_{\overline{z}}\phi = 0$ gairebé a tot arreu, aleshores ϕ és conforme.*

Si s'imposa menys rigidesa a aquest tipus de funcions, es dona pas al concepte de quasiregularitat, la flexibilitat del qual juga un paper fonamental a l'hora de dur a terme la cirurgia en la prova de la pedra angular d'aquest article. Una funció K-quasiregular és aquella que és K-quasiconforme excepte en un conjunt discret de punts. Per exemple, una funció és 1-quasiregular si i només si és holomorfa. Quant a la cirurgia, es refereix a poder definir funcions quasiregulars a trossos sense perdre aquesta propietat. Per dur a terme aquesta tècnica, també és crucial l'ús de les funcions quasisimètriques (una versió unidimensional de la quasiconformitat), que aporten la condició òptima per a l'extensió a les fronteres de les funcions quasiconformes. Tot i això, aquestes no s'introdueixen aquí i se n'ometran els detalls corresponents en la demostració de la propera secció.

3 Teorema de redreçament

La renormalització és una tècnica recurrent per explicar fenòmens a petita escala i relacionar-los amb d'altres d'escala major. La teoria pren diverses formes particulars depenent del camp que s'estudiï (química, física, matemàtiques, etcètera). L'objectiu principal és donar una idea de la demostració del teorema de redreçament (*the Straightening Theorem*), un resultat present en tots i cadascun dels arguments de renormalització d'aquest article. En termes generals, afirma que la dinàmica local d'un sistema, sota certes hipòtesis, està lligada a un polinomi per mitjà d'una conjugació que experimenta un cert grau de regularitat més enllà de ser un homeomorfisme. Més concretament, les conjugacions són quasiconformes i, per tant, són aquelles que deformen els angles entre corbes de forma controlada.

Com a pas previ, cal introduir un concepte que generalitza la definició usual de polinomi.

Definició 3.1. (Funció de tipus polinomial) *Una funció de tipus polinomial de grau d és una terna $(f;U,V)$ tal que*

- *U i V són conjunts oberts conformement equivalents a $\mathbb{D}$;*
- *$\overline{U} \subset V$;*
- *$f : U \to V$ és una funció pròpia (i.e. tal que l'antiimatge de tot compacte és compacta) i tot punt de V té exactament d antiimatges en U quan aquestes es compten amb la seva multiplicitat.*

Teorema 3.1. (Teorema de redreçament) *Tota funció de tipus polinomial $(f;U,V)$ de grau d és quasiconformement conjugada a un polinomi P del mateix grau.*

Idea de la demostració.

Es fixa $\rho > 0$ i es considera una funció de Riemann (biholomorfisme) $R : \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{V} \to \hat{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{\rho^d}}$ que deixi fix el punt de l'infinit, on $\mathbb{D}_{\rho^d} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho^d\}$. Per arguments de quasisimetria, es pot estendre R analíticament a la frontera de V. Si es denota aquesta extensió per $\psi_1 : \partial V \to \mathbb{S}_{\rho^d}$, on $\mathbb{S}_{\rho^d} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho^d\}$, aleshores es pot definir una funció holomorfa ψ_2 que sigui solució de l'equació $(\psi_2(z))^d = \psi_1(f(z))$. Si s'empren de nou resultats de cirurgia quasiconforme, es pot considerar una interpolació quasiconforme de ψ_1 i ψ_2 entre ambdós anells del pla complex. Així doncs, s'escriu $\psi : \overline{V} \setminus U \to \overline{\mathbb{D}_{\rho^d}} \setminus \mathbb{D}_\rho$ per simbolitzar aquesta funció.

Es considera
$$F(z) := \begin{cases} f(z), & \text{si } z \in U \\ R^{-1}\left((\psi(z))^d\right), & \text{si } z \in A_0 := V \setminus U \\ R^{-1}\left((R(z))^d\right), & \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus V \end{cases},$$
que és quasiregular per ser composició de funcions holomorfes i quasiconformes, i es defineix la següent estructura quasicomplexa, que és F-invariant.

$$\mu(z) := \begin{cases} \psi^*\mu_0(z), & \text{si } z \in A_0 := V \setminus U \\ (f^n)^*\mu(z), & \text{si } z \in A_n := \{z \in U \mid f^n(z) \in V \setminus U\} \\ \mu_0(z), & \text{altrament} \end{cases}$$

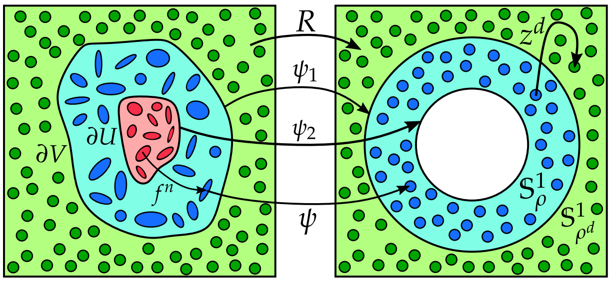

Figura 5: Coeficient de Beltrami a través de les funcions que componen F.

Pel teorema d'integrabilitat, es pot considerar una funció quasiconforme ϕ tal que $\mu = \phi^*\mu_0$ i $\phi(\infty) = \infty$.

$$\begin{tikzcd}
(\hat{\mathbb{C}}, \mu) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\phi"'] & (\hat{\mathbb{C}}, \mu) \arrow[d, "\phi"] \\
(\hat{\mathbb{C}}, \mu_0) \arrow[r, "P := \phi \circ F \circ \phi^{-1}"] & (\hat{\mathbb{C}}, \mu_0)
\end{tikzcd}$$

Si es defineix $P := \phi \circ F \circ \phi^{-1}$ i es té en compte que μ_0 és P-invariant, P serà holomorfa com a conseqüència del lema de Weyl. De fet, en realitat es tracta d'una funció entera que es comporta com z^d en un entorn de l'infinit i, per tant, és precisament un polinomi de grau d que satisfà l'enunciat del teorema. $\square$

Una conseqüència directa d'aquest resultat és la presència de còpies de conjunts de Julia de polinomis en els plans dinàmics de certes funcions holomorfes, a priori no relacionades amb els polinomis (e.g. la presència de conills de Douady en la Figura 3). A més a més, també explica l'autosimilitud de certs conjunts de Julia. Sorprenentment, aquest fenomen també apareix en el pla de paràmetres: no només apareixen còpies del conjunt de Mandelbrot a totes les escales en l'espai de paràmetres de la família quadràtica, sinó que també ho fan en moltes altres famílies de funcions holomorfes. Ambdós fenòmens s'expliquen gràcies a la renormalització, particularment gràcies a la versió paramètrica del teorema de redreçament. Tot i que aquest no es presenta formalment, és interessant de citar l'Adrien Douady en tant que resumeix l'essència rere la prova del resultat:

"Primer llaures al pla dinàmic i després culls a l'espai de paràmetres"

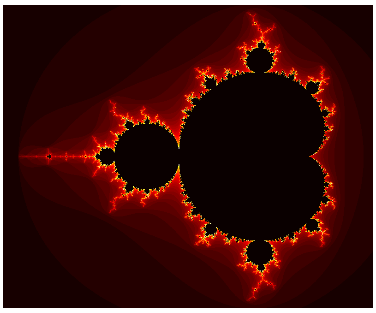

Figura 6: Conjunt de Mandelbrot.

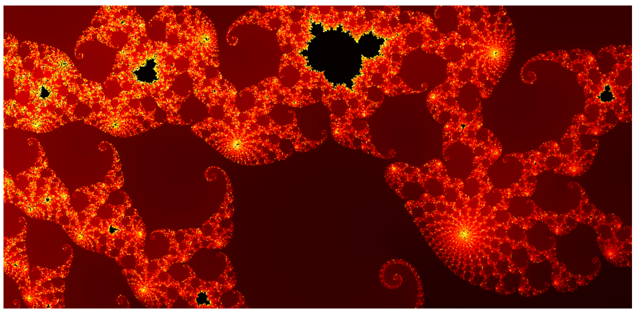

Figura 7: Còpies del conjunt de Mandelbrot dins de si mateix.

4 Renormalització en dinàmica complexa

La teoria de renormalització juga un paper destacat en un dels principals problemes oberts de la dinàmica holomorfa: la demostració de la conjectura MLC, que es pregunta si el conjunt de Mandelbrot $\mathcal{M}$ és localment connex. Aquesta va sorgir del treball d'Adrien Douady i John H. Hubbard (1945). Avui dia, aquesta ha estat validada per molts dels valors $c \in \partial\mathcal{M}$ i alguns matemàtics segueixen estudiant els casos restants. De fet, s'ha guardonat alguns dels autors que han fet importants avenços en el camp amb la medalla Fields, com per exemple J. C. Yoccoz (1957 – 2016) l'any 1994, C. T. McMullen (1958) l'any 1998 i Artur Ávila (1979) l'any 2014.

A banda de la conjectura, es pot treure profit del teorema de redreçament desenvolupant aplicacions més concretes. Per exemple, en l'estudi presentat, es tracta l'espai dels polinomis cúbics controlant el comportament dels respectius punts crítics (i.e. els zeros de la derivada), que es denoten per ω_1 i ω_2 en les Figures 8 i 9. Tot i que els resultats es donen rigorosament i es demostren a [2][Chapter 4], aquí només se'n proporcionen casos particulars d'exemple.

El primer justifica la presència d'infinites components connexes $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2^1, \mathcal{C}_2^2, \mathcal{C}_2^3, \mathcal{C}_3^1, \mathcal{C}_3^2, \mathcal{C}_3^3, \mathcal{C}_4^1, \dots)$ del conjunt ple de Julia d'una classe de polinomis, homeomorfes a K_{z^2+c} per a un mateix $c \in \mathcal{M}$. Les hipòtesis que s'exigeixen són l'escapament a l'infinit només de l'òrbita d'un dels punts crítics (ω_1) i la inclusió de l'altra (i.e. l'òrbita de ω_2) en una component connexa del conjunt de Julia (e.g. $\mathcal{C}_0$). Un cop detectada la component $\mathcal{C}_0$, les altres s'obtenen com a successives antiimatges d'aquesta.

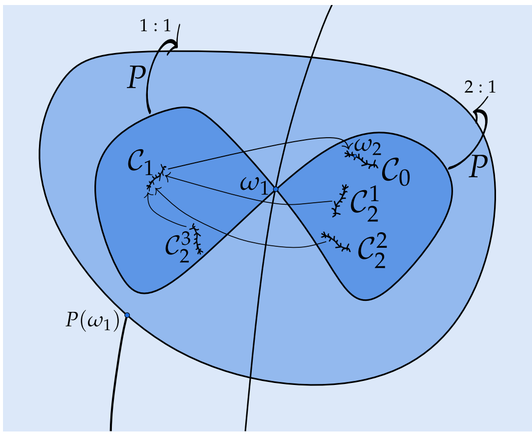

Figura 8: Pla dinàmic d'un polinomi cúbic P.

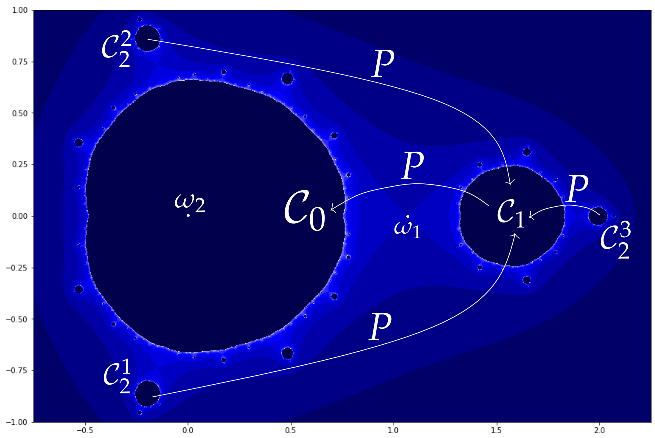

Figura 9: Conjunt ple de Júlia de $z^3 - 1.6z^2$.

Finalment, si es considera la versió paramètrica del teorema de redreçament, fàcilment s'extrapola el resultat a certs espais de paràmetres de famílies de polinomis cúbics sota hipòtesis similars i permet justificar la presència de còpies del conjunt de Mandelbrot. A la Figura 10 es representa el cas de la família $\lambda z^2(2z-3)+4+\lambda$, on s'aprecia clarament una component homeomorfa al conjunt de Mandelbrot de la Figura 6.

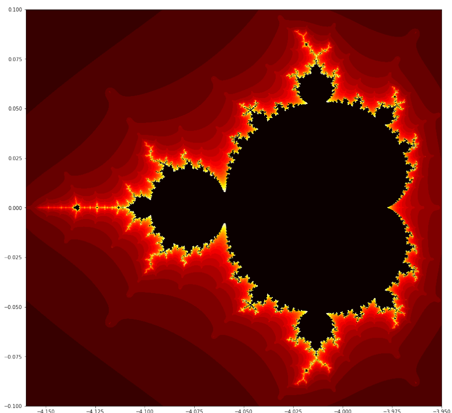

Figura 10: Pla de paràmetres de la família $\lambda z^2(2z-3)+4+\lambda$.

En conclusió, la tècnica de renormalització és eminent en l'estudi de la dinàmica complexa i és útil tant per demostrar resultats més elementals com per cercar la prova de la incògnita més rellevant en aquesta branca de les matemàtiques, la conjectura MLC.

Referències

[1] B. Branner and N. Fagella (2014). *Quasiconformal Surgery in Holomorphic Dynamics*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics.

[2] A. Hernández (2018). *Renormalization in complex dynamics*. Treball de fi de grau. Universitat de Barcelona.