EL TEOREMA DE DENJOY-WOLFF: EXTENSIONS I APLICACIONS

Autora: Anna Jové Campabadal
Directora: Núria Fagella Rabionet

Resum

L'objectiu principal d'aquest article és estudiar la iteració de funcions holomorfes al disc unitat $\mathbb{D}$ i aplicar els resultats en un context més general de dinàmica complexa. L'estudi de la iteració de funcions holomorfes a $\mathbb{D}$ queda completat amb els resultats de Denjoy, Wolff i Cowen. Es presentarà un esbós de la demostració del teorema de Denjoy-Wolff utilitzant la geometria hiperbòlica i es descriuran les principals conseqüències del teorema de Cowen. Finalment, s'estudiaran les aplicacions d'aquests resultats en la dinàmica de funcions enteres. En concret, es classificaran les components de Fatou i els dominis de Baker.

1 Iteració de funcions holomorfes al disc unitat

En general, donats un obert qualsevol U del pla complex i una funció holomorfa $f\colon U \to U$, l'objectiu de la dinàmica complexa és estudiar com es comporten els iterats de f. És a dir, si $z \in U$, es pretén entendre el comportament asimptòtic de la successió $\left\{z, f(z), f^2(z) \dots\right\}$. Primer ens centrem en el cas que U és el disc unitat $\mathbb{D}$.

Poc s'havia parlat del tema fins el 1926, quan J. Wolff va publicar un article a *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* on demostrava que, donada qualsevol funció holomorfa del disc unitat $\mathbb{D}$, no conforme i sense punts fixos a $\mathbb{D}$, totes les òrbites convergeixen cap al mateix punt a la frontera. Havia assumit que la funció s'estenia de manera contínua a la frontera. Dues setmanes més tard, el mateix Wolff va publicar un article on mostrava que la hipòtesi de continuïtat a la frontera era, de fet, supèrflua ([11]). Una setmana més tard, A. Denjoy en va publicar una demostració alternativa ([5]). A causa de la independència de les dues demostracions, el teorema s'anomena en honor dels dos matemàtics.

Teorema (Denjoy-Wolff, 1926). *Sigui $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa, no conjugada a una rotació. Llavors, existeix un punt $a \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $\forall z \in \mathbb{D}$, $f^n(z) \to a$ quan $n \to \infty$.*

El punt a s'anomena **punt de Denjoy-Wolff** de f.

1.1 Demostració del teorema de Denjoy-Wolff

Presentem un esbós d'una demostració alternativa del teorema de Denjoy-Wolff, proposada per A. Beardon (1991), que utilitza la mètrica hiperbòlica en lloc de l'euclidiana. Es pot trobar amb més detall a [3].

La **mètrica hiperbòlica** es construeix imposant que les isometries siguin exactament les funcions conformes (i.e. holomorfes i bijectives) de $\mathbb{D}$. El disc unitat amb aquesta mètrica forma un espai mètric complet. Es pot veure que la topologia que indueix aquesta nova mètrica és equivalent a l'euclidiana, de manera que si podem veure que una successió convergeix amb la mètrica hiperbòlica, també ho farà amb l'euclidiana. Finalment, el resultat cabdal i que justifica l'ús d'aquesta mètrica és el **lema de Schwarz-Pick**, que afirma que tota funció holomorfa no conforme és estrictament contractiva respecte de la mètrica hiperbòlica. Se'n poden trobar més detalls a [10].

El cas de les funcions conformes del disc pot ser estudiat explícitament, tenint en compte que aquestes funcions són de la forma $f(z) = e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ amb $\theta \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{D}$. Per altra banda, com a conseqüència del lema de Schwarz-Pick, si f és una funció no conforme amb un punt fix a $\mathbb{D}$, totes les òrbites convergeixen cap a aquest punt.

Així doncs, resta considerar que f sigui una funció holomorfa no conforme sense punts fixos a $\mathbb{D}$. Necessàriament les òrbites han de tendir a $\partial\mathbb{D}$, ja que, donat $z \in \mathbb{D}$, es pot veure que qualsevol punt d'acumulació de $\{f^n(z)\}_n$ a $\mathbb{D}$ és fix per f. A més a més, pel lema de Schwarz-Pick, si veiem que una òrbita tendeix cap a un punt, totes les òrbites han de tendir cap a aquest mateix punt.

Així doncs, n'hi ha prou amb veure que $f^n(0)$ s'acumula en un únic punt a $\partial\mathbb{D}$. Per fer-ho, considerem $f_\varepsilon(z) = (1-\varepsilon)f(z)$, amb $\varepsilon \in (0,1)$. Pel teorema del punt fix de Brouwer, f_ε té un punt fix a $\mathbb{D}$, que pel lema de Schwarz-Pick és únic. L'anomenem z_ε. Construïm un disc hiperbòlic D_ε centrat en z_ε i amb l'origen a la seva frontera, és a dir, $D_\varepsilon = \{w \colon \rho(z_\varepsilon, w) < \rho(z_\varepsilon, 0)\}$. Pel lema de Schwarz-Pick, D_ε és invariant per f_ε. Qualsevol límit dels discs D_ε és un disc hiperbòlic amb el zero a la seva frontera, invariant per f i tangent a $\mathbb{D}$ en un únic punt. Es pot demostrar que tal disc és únic, anomenem D el disc límit i a el punt de tangència amb $\mathbb{D}$. Es dedueix que $\forall n$, $f^n(0) \in \overline{D}$ i, per tant, $f^n(0) \to a$, com volíem demostrar.

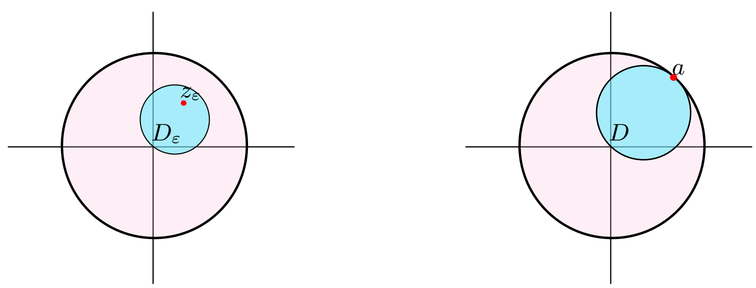


Figura 1: Representació esquemàtica dels discs D_ε's i del disc límit D.

1.2 Dinàmica en un entorn del punt de Denjoy-Wolff

Un cop sabem que totes les òrbites convergeixen cap a un mateix punt, és natural preguntar-nos *com* convergeixen. Si suposem que la funció f s'estén de manera analítica en un entorn del punt de Denjoy-Wolff, aleshores aquesta qüestió està estretament lligada amb el problema de la linealització al voltant d'un punt fix, àmpliament estudiat per Schröder (1871), Koenigs (1884) i Leau (1897), entre d'altres.

Tot i això, el problema general del comportament de les òrbites en un entorn del punt de Denjoy-Wolff, sense assumir-ne l'extensió analítica, va romandre obert fins al 1981, quan Cowen va demostrar l'existència d'un entorn on la dinàmica és essencialment lineal. Va anomenar aquests entorns *dominis absorbents*.

Definició. Sigui f una funció d'un domini $\Delta \subset \mathbb{C}$ en ell mateix, diem que V és un **domini absorbent** per f en Δ si V és obert, connex, simplement connex, invariant per f i tal que per tot compacte $K \subset \Delta$, existeix un n tal que $f^n(K) \subset V$.

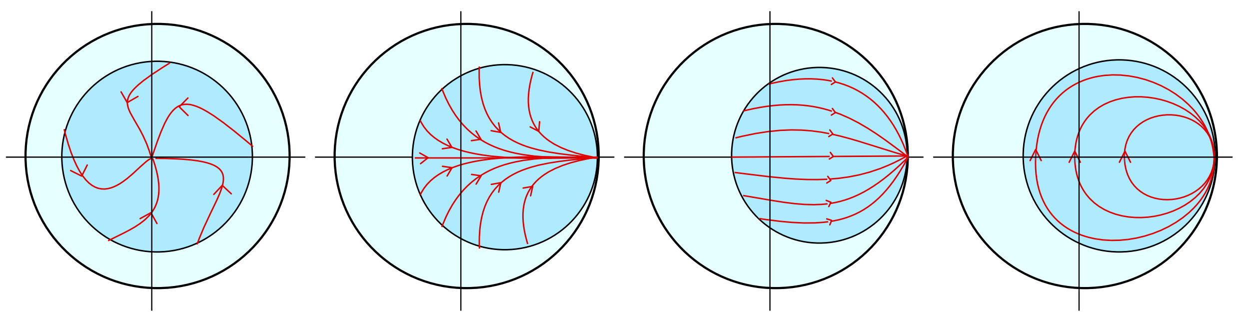
Teorema (Cowen, 1981). *Sigui $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorfa, no constant i no conforme, amb punt de Denjoy-Wolff a. Suposem que $f'(a) \neq 0$, si $a \in \mathbb{D}$. Aleshores, existeix un domini absorbent V per*

f en $\mathbb{D}$, un domini Ω ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{D}$), una transformació conforme $\phi\colon \Omega \to \Omega$ i una funció holomorfa $\sigma\colon \mathbb{D} \to \Omega$, tals que σ i f són injectives a V, $\sigma(V)$ és un domini absorbent per ϕ en Ω i el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\sigma"] & \mathbb{D} \arrow[d, "\sigma"] \\ \Omega \arrow[r, "\phi"] & \Omega \end{tikzcd}$$

La demostració del teorema anterior es pot trobar a [4]. Del fet que ϕ sigui una transformació conforme d'Ω, es dedueix que Ω i ϕ poden ser escollits entre els casos següents. Per comoditat, treballem amb el semiplà superior $\mathbb{H}$ en lloc del disc unitat $\mathbb{D}$, que són conformement equivalents.

1. $\Omega = \mathbb{C}$, $\phi(z) = sz$, amb $0 < |s| < 1$
2. $\Omega = \mathbb{C}$, $\phi(z) = z + 1$.
3. $\Omega = \mathbb{H}$, $\phi(z) = sz$ amb $0 < s < 1$.
4. $\Omega = \mathbb{H}$, $\phi(z) = z \pm 1$.



(a) *CAS 1* (b) *CAS 2* (c) *CAS 3* (d) *CAS 4*

Figura 2: Els diferents tipus de convergència al punt de Denjoy-Wolff.

Notem que el primer cas té lloc quan el punt de Denjoy-Wolff es troba a l'interior del disc unitat i els altres tres casos, quan es troba a la frontera.

2 Aplicacions en la dinàmica de funcions enteres

Amb els resultats de Denjoy, Wolff i Cowen obtenim una descripció força completa de la dinàmica de les funcions holomorfes al disc unitat. Podríem caure en l'error de pensar que això només és una classe molt restrictiva de funcions. Ans al contrari, via l'apliació de Riemann, aquests resultats poden ser generalitzats i són de gran utilitat a l'hora de tractar la iteració de funcions enteres.

La iteració de funcions al pla complex ampliat $\widehat{\mathbb{C}}$ va començar quan l'Acadèmia Francesa de les Ciències va decidir que li dedicaria el *1918 Grand Prix des Sciences Mathématiques.* Competint pel premi, dos matemàtics, P. Fatou i G. Julia, van desenvolupar independentment una innovadora teoria basant-se en els resultats sobre famílies normals de P. Montel (1912). Els dos van arribar als mateixos resultats, aproximant-s'hi de manera diferent. La idea principal va ser dividir $\widehat{\mathbb{C}}$ en dos conjunts, un on els iterats es comportessin de manera regular i un altre on la dinàmica fos caòtica. Aquests dos conjunts s'anomenen respectivament *conjunt de Julia* i *conjunt de Fatou*, en honor dels dos cèlebres matemàtics francesos. Anant un pas més enllà, l'any 1926, Fatou va estendre els seus resultats a funcions enteres ([8]), i s'adonà de la dificultat que suposa treballar amb funcions enteres transcendents, és a dir, aquelles que tenen una singularitat essencial a l'infinit.

Així doncs, donada una funció entera f i un punt qualsevol $z_0 \in \mathbb{C}$, diem que z_0 pertany al **conjunt de Fatou** ($F(f)$) si existeix un entorn U de z_0 tal que la família $\left\{f^n_{|U}\right\}_n$ és normal. Altrament, si no existeix cap entorn on la successió d'iterades formi una família normal, direm que z_0 pertany al **conjunt de Julia** ($J(f)$). Directament de la definició es dedueix que el conjunt de Fatou és obert i que el conjunt de Julia és tancat. A més a més, es pot demostrar que el conjunt de Julia és no buit i totalment invariant per f. Per a més propietats del conjunt de Fatou i de Julia, veure [9].

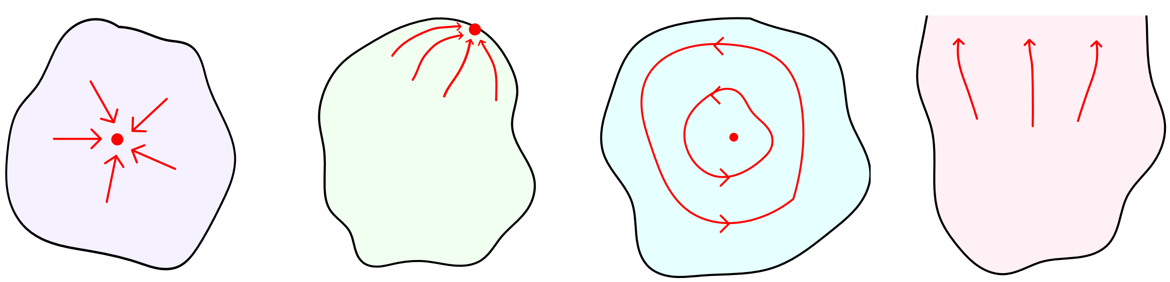
2.1 Classificació de les components de Fatou

Donada una funció entera f, anomenem **component de Fatou** cadascuna de les components connexes del conjunt de Fatou $F(f)$. Del fet que el conjunt de Julia i el de Fatou siguin totalment invariants, es dedueix que la imatge per f d'una component de Fatou és també una component de Fatou. Per tant, podem classificar les components de Fatou de la manera següent:

- Si existeix $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) = U$, diem que U és **periòdica**.
- Si U no és periòdica però $f^j(U)$ sí que ho és, per algun $j \in \mathbb{N}$, diem que U és **preperiòdica**.
- Altrament, si $f^n(U) \neq f^m(U)$, per tot $n \neq m$, diem que U és un **domini errant**.

Teorema (Fatou, 1919). *Sigui f una funció entera i U una component de Fatou k-periòdica. Llavors, ocorre exactament una de les possibilitats següents:*

1. *U conté un punt periòdic atractor z_0 i $f^{nk} \to z_0$ uniformement sobre compactes de U. Llavors, U és una component de la **conca d'atracció** de z_0.*
2. *∂U conté un punt periòdic parabòlic z_0 i $f^{nk} \to z_0$ uniformement sobre compactes de U. Llavors, U és una component de la **conca parabòlica d'atracció** de z_0.*
3. *$f^k_{|U}$ és conformement conjugada a una rotació irracional. Llavors, U és un **disc de Siegel**.*
4. *En el cas que f sigui una funció entera transcendent, U també pot ser un **domini de Baker**, és a dir, $f^{nk} \to \infty$ uniformement sobre compactes de U.*



(a) Conca d'atracció. (b) *Conca parabòlica* (c) *Disc de Siegel.* (d) *Domini de Baker.*

Figura 3: Representació esquemàtica dels diferents tipus de components de Fatou.

Observem que, tant en una conca parabòlica com en un domini de Baker, els iterats convergeixen cap a un únic punt $z_0 \in \partial U$. En el cas d'una conca parabòlica, la funció està definida en aquest punt; en canvi, en un domini de Baker, els iterats convergeixen cap a $z_0 = \infty$, on la funció no hi està definida.

Idea de la demostració. No seguirem la demostració original de Fatou ([7]), sinó que presentem una prova alternativa basada en el teorema de Denjoy-Wolff.

Per poder aplicar el teorema de Denjoy-Wolff, necessitem treballar amb funcions del disc unitat. Tot i això, si veiem que U és simplement connexa, podrem establir una conjugació amb una funció del disc unitat. La simple-connexió ve garantida pel teorema següent.

Teorema (Baker, 1984). *Sigui f una funció entera i U una component de Fatou k-periòdica. Aleshores U és simplement connexa.*

La demostració del teorema anterior és senzilla en el cas dels polinomis, i es basa en el principi del mòdul màxim. En el cas de les funcions enteres transcendents, la demostració és força més complicada i es pot trobar a [1].

Un cop sabem que U és simplement connexa, aplicant el teorema de Riemann, obtenim que existeix $\varphi\colon U \to \mathbb{D}$ conforme. Aquesta funció φ és de fet una conjugació entre f^k i una funció $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on podem aplicar el teorema de Denjoy-Wolff. Es dedueixen les següents possibilitats per a la funció g:

(a) La funció g és conjugada a una rotació racional. Aquesta opció l'hem de descartar, perquè implicaria, pel principi de prolongació analítica, que $f^{km} = Id$, per algun m.

(b) La funcó g és conjugada a una rotació irracional. Per tant, f^k també ho és, i estem davant d'un disc de Siegel (possibilitat 3).

(c) Existeix un punt fix a $\mathbb{D}$. Es correspon amb un punt k-periòdic atractor de f (possibilitat 1).

(d) Totes les òrbites convergeixen cap a un únic punt a $\partial\mathbb{D}$.

Per finalitzar la demostració, s'hauria de veure que el cas (d) es correspon amb una conca parabòlica o un domini de Baker, en funció de si f està definida o no al punt de convergència. La dificultat ve donada pel fet que φ pot no estar definida a ∂U, però, en contrapartida, f és contínua a ∂U llevat de, com a màxim, un punt. Els detalls restants poden ser consultats a [2].

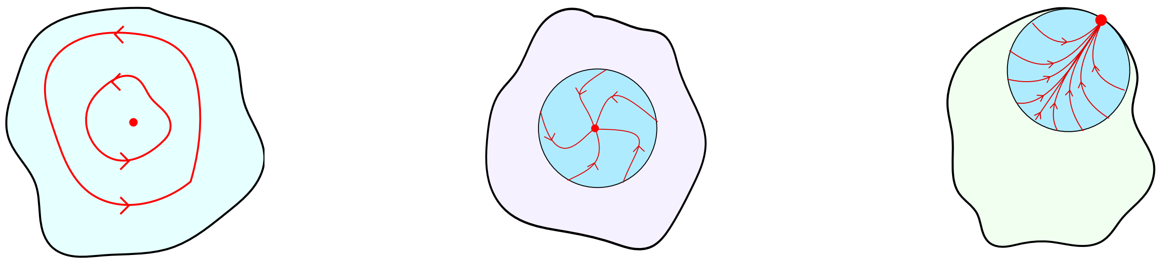
2.2 Dinàmica a les components de Fatou: classificació dels dominis de Baker

Ara, com abans, sabem cap a on convergeixen les òrbites i ens preguntem *com* hi convergeixen. Deixant a banda els discs de Siegel, on ja sabem que la funció és conjugada a una rotació irracional, ens interessem per la dinàmica a les altres components de Fatou.

Suposem donada una component de Fatou k-periòdica U, d'una funció entera f. Com abans, de la simple-connexió de U es dedueix que $f^k_{|U}$ és conformement conjugada a una aplicació $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, on el teorema de Cowen s'aplica. Conseqüentment, tenim que existeix un domini absorbent V per f^k en U on la funció és conjugada a un dels quatre casos fonamentals: una homotècia o una translació a $\mathbb{C}$, o una homotècia o una translació a $\mathbb{H}$.

Si U conté un punt periòdic atractor, llavors g té un punt fix a $\mathbb{D}$ i, per tant, la dinàmica en un entorn d'aquest punt és conjugada a una homotècia de $\mathbb{C}$. En el cas que hi hagi un punt periòdic parabòlic a ∂U, tot i que a priori podrien ocórrer els tres casos de la classificació de Cowen amb convergència a la frontera, es pot veure que necessàriament la dinàmica és conjugada a una translació de $\mathbb{C}$. La demostració d'aquest darrer fet es deriva del teorema de la flor de Leau-Fatou, que pot ser consultat, per exemple, a [2].

En els dominis de Baker, en canvi, la dinàmica no està unívocament determinada i poden ocórrer els tres casos de convergència a la frontera de la classificació de Cowen. Això permet classificar-los de la manera següent:



(a) *Disc de Siegel.* (b) Conca d'atracció. (c) *Conca parabòlica*

Figura 4: Representació esquemàtica de la dinàmica en les diferents components de Fatou.

Teorema (Classificació dels dominis de Baker). *Sigui B un domini de Baker de f i $V \subset B$ un domini absorbent per f en B. Llavors, prenent $\Omega = \mathbb{C}$ o $\Omega = \mathbb{H}$, existeix $\psi \colon B \to \Omega$, que és injectiva a V, i una transformació conforme $\phi \colon \Omega \to \Omega$ tal que $\psi \circ f = \phi \circ \psi$. A més a més, Ω està unívocament determinada, ϕ és única llevat de conjugació i poden ser escollides entre les següents:*

*(a) $\Omega = \mathbb{C}$ i $\phi(z) = z + 1$. En aquest cas, diem que B és **parabòlic doble**.*

*(b) $\Omega = \mathbb{H}$ i $\phi(z) = sz$, amb $0 < s < 1$. En aquest cas, diem que B és **hiperbòlic**.*

*(c) $\Omega = \mathbb{H}$ i $\phi(z) = z \pm 1$. En aquest cas, diem que B és **parabòlic simple**.*

Es poden trobar exemples dels diferents tipus de dominis de Baker a [6].

Referències

[1] I. N. Baker, Wandering domains in the iteration of entire functions. *Proceedings of the London Math. Soc.* (1984), 563-576.

[2] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*. Springer-Verlag, 1991. ISBN: 0387951512.

[3] L. Carleson and T.W. Gamelin, *Complex Dynamics*. Springer, 1993. ISBN: 0387979425.

[4] C.C. Cowen, Iteration and the solution of functional equations for functions analytic in the unit disk. *Transactions of the American Math. Soc.* **265**, num.1 (1981), 69-95.

[5] A. Denjoy, Sur l'itération des fonctions analytiques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences.* **182** (1926), 255-257.

[6] N. Fagella and C. Henriksen, Deformation of entire functions with Baker domains. *Discrete and continuous dynamical systems* **15**, num. 2 (2006), 379-394.

[7] P. Fatou, Sur les équations fonctionnelles, *Bulletin de la S.M.F.* **47** (1919), 161-271.

[8] P. Fatou, Sur l'itération des fonctions transcendantes entières, *Acta Math.* **47** (1926), 337-60.

[9] X-H. Hua and C-C. Yang, *Dynamics of transcendental functions.* Asian Mathematics Series, Volume 1. 1998. ISBN: 9056991612.

[10] L. Keen and N. Lakic. *Hyperbolic Geometry from a local viewpoint.* Cambridge University Press, 2007. ISBN: 0521863600.

[11] J. Wolff, Sur l'itération des fonctions bornées, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences.* **182** (1926), 200-201.