Realitzacions homotòpiques dels infinit grupoides

Jan McGarry Furriol *

2 de març de 2021

Resum. La hipòtesi d'homotopia de Grothendieck afirma que l'estudi dels tipus d'homotopia dels espais topològics és equivalent a l'estudi dels ∞-grupoides, tot il·lustrant com idees importants en teoria de categories d'ordre superior troben el seu origen en conceptes homotòpics bàsics. En la pràctica hi ha diferents models per als ∞-grupoides i donar una demostració de la hipòtesi d'homotopia és una prova per a la idoneïtat d'un tal model. En aquest article resumim una demostració de la hipòtesi d'homotopia usant categories topològiques (és a dir, categories enriquides sobre espais topològics) com a models per als ∞-grupoides. En el mateix context, proposem un model manejable per al ∞-grupoide fonamental d'un espai topològic.

1 Introducció

Aquest article és fruit de l'estudi d'una equivalència entre els espais topològics i els ∞-grupoides en el marc de la teoria d'homotopia: la hipòtesi d'homotopia. Començarem examinant la teoria i els resultats que van culminar un estudi exhaustiu de la relació entre espais topològics i conjunts simplicials desenvolupat durant els anys cinquanta i seixanta. Els seus orígens retrocedeixen fins a Kan, per la seva feina introduint els functors adjunts, i va arribar a una gran fita amb la feina de Quillen en categories de models. Tot seguit, entrarem en el context de la teoria de categories d'ordre superior, en el qual es troben els ∞-grupoides, per a demostrar la hipòtesi d'homotopia.

Què és la topologia algebraica?

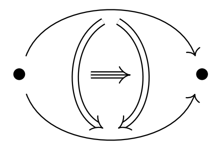
El concepte fonamental en aquesta àrea de les matemàtiques és el d'homotopia, que és una noció de "deformació" contínua. Concretament, dues aplicacions són homòtopes si es poden "deformar" l'una en l'altra de forma contínua. D'aquí sorgeix la noció d'equivalència homotòpica (feble) entre espais topològics; per exemple, el pla sense l'origen és homotòpicament equivalent a la circumferència. L'objectiu de la topologia algebraica és classificar els tipus d'homotopia dels espais topològics, on diem que dos espais són del mateix tipus si són homotòpicament equivalents. Per a fer això, s'estudien invariants per equivalència homotòpica com el grup fonamental. El grup fonamental és un invariant molt útil per a classificar els tipus d'homotopia, però està lluny de permetre fer-ne una classificació o modelització completa. Buscarem objectes algebraics que sí que ho facin.

Models per als tipus d'homotopia

Una forma més natural d'emmagatzemar la informació del grup fonamental és considerar el grupoide fonamental, ja que no ens cal fer cap tria de punt base. El *grupoide fonamental* és una categoria que té per objectes els punts de l'espai topològic i per morfismes classes d'homotopia de camins.

* Correu electrònic: mcgarryjan@gmail.com
2010 Mathematics Subject Classification: 55U40, 55P15, 18B40

No és sorprenent que aquest no permeti classificar els tipus d'homotopia de forma completa, ja que perdem molta informació en considerar els camins mòdul homotopia. Per tant, ara passem a prendre els camins com a morfismes i guardem la informació sobre les homotopies per separat. Considerarem les homotopies com a *morfismes d'ordre 2*, és a dir, morfismes entre morfismes. De la mateixa manera, considerem homotopies entre homotopies com a *morfismes d'ordre 3*, etc. Vegeu una representació d'aquesta idea a la figura a mà dreta.



L'objecte obtingut en considerar les homotopies de tots els ordres és l'anomenat ∞-*grupoide fonamental*. Aquest és una idea genuina d'∞-grupoide, amb el qual Alexander Grothendieck va motivar la seva conjectura que deia que hauria d'existir un bon model per a la noció d'∞-grupoide pel qual l'estudi dels tipus d'homotopia dels espais topològics sigui equivalent al dels ∞-grupoides. Això és el que es coneix com la hipòtesi d'homotopia i és vista com una prova per a la idoneïtat d'un model d'∞-grupoide. Les idees de Grothendieck es troben en el seu manuscrit *À la poursuite des champs*, on el matemàtic començà la cerca d'un tal model.

Un cop equipats amb les idees d'aquesta breu introducció, podem donar sentit als objectius d'aquest article: primer, resumir la demostració descrita a [8] de la hipòtesi d'homotopia usant categories topològiques com a models per als ∞-grupoides; segon, donar un model intuïtiu i accessible de l'∞-grupoide fonamental d'un espai topològic. Per a demostrar la hipòtesi d'homotopia usarem la formalització de les categories de models. Concretament, demostrarem que les categories homotòpiques dels espais topològics i dels ∞-grupoides són equivalents.

2 Categories de models

Hi ha molts contextos ben coneguts en els quals emergeix una teoria d'homotopia, com ara espais topològics, complexos de cadenes o conjunts simplicials. En els anys seixanta, Quillen va caracteritzar el comportament en comú de diversos exemples i va presentar un conjunt d'axiomes per a una teoria d'homotopia, els quals donen lloc a la definició que segueix. Una *categoria de models* és una categoria amb una estructura addicional donada per tres classes de morfismes: *equivalències febles*, *fibracions* i *cofibracions*, que satisfan els axiomes de Quillen (vegeu [5] per als detalls). En una categoria de models tenim una noció d'homotopia i hi podem desenvolupar una teoria d'homotopia. La relació d'homotopia és d'equivalència i es comporta bé amb la composició sobre morfismes entre objectes que són alhora *fibrants* i *cofibrants*; podem restringir l'atenció a aquests "bons" objectes perquè representen els tipus d'homotopia. Per tant, la categoria següent està ben definida:

Definició 2.1. La *categoria homotòpica* $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ d'una categoria de models $\mathcal{C}$ es defineix com segueix:

- Els objectes són els objectes de $\mathcal{C}$ que són, alhora, fibrants i cofibrants.
- Si X i Y són dos objectes de $\mathcal{C}$, definim $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})(X,Y) = [X,Y]$, on els claudàtors denoten les classes d'homotopia d'aplicacions.
- Si f i g són dues aplicacions que es poden compondre a $\mathcal{C}$, definim $[f] \circ [g] = [f \circ g]$.

La maquinària de les categories de models ens permet mostrar que la categoria que tot just hem definit és equivalent a la categoria obtinguda en invertir formalment totes les equivalències febles de $\mathcal{C}$, la qual cosa indica que les equivalències febles aporten la informació essencial sobre la teoria d'homotopia a $\mathcal{C}$.

Tenim una noció d'equivalència entre categories de models: equivalència de Quillen. Veiem les teories d'homotopia de dues categories de models Quillen equivalents com a coincidents i, en particular, una equivalència de Quillen indueix una equivalència entre les respectives categories homotòpiques.

3 Visió general de la demostració

En aquesta secció presentem un esquema de la demostració de la hipòtesi d'homotopia que donarem, obviant per ara les estructures de models. Tindrem tres equivalències de Quillen: la primera entre espais topològics i conjunts simplicials; la segona entre categories topològiques i categories simplicials, la qual és una versió "enriquida" de la primera, i la tercera entre conjunts simplicials i categories simplicials. Sota aquestes equivalències exposarem una equivalència entre les categories homotòpiques dels espais topològics i dels ∞-grupoides, cosa que provarà la hipòtesi d'homotopia.

4 Espais topològics i conjunts simplicials

El resultat següent, presentat amb la formalització de Quillen, culmina la comparació entre les teories d'homotopia dels espais topològics i dels conjunts simplicials desenvolupada a mitjans del segle passat. Considerem la categoria dels espais topològics, denotada **Top**, equipada amb l'estructura de models *estàndard* [5, § 2.4] i la categoria dels conjunts simplicials, denotada **sSet**, amb l'estructura de models *de Quillen* [3, teorema 11.3].

Teorema 4.1 (Quillen [9, cap. 1, § 4])**.** *El functor complex singular* Sing *i el functor realització geomètrica* $|-|$ *formen una equivalència de Quillen entre* **Top** *i* **sSet**.

Per exemple, les equivalències febles a l'estructura de models considerada a **Top** són aquelles aplicacions que indueixen isomorfismes entre grups d'homotopia i una bijecció entre components connexes, és a dir, les *equivalències homotòpiques febles*.

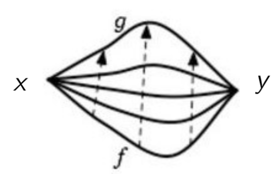
En el nostre context, d'entre els conjunts simplicials ens són d'especial interès les quasicategories i els conjunts de Kan. Aquests són conjunts simplicials que comparteixen una estructura particularment rica i els segons són una subfamília dels primers. Els objectes que són, alhora, fibrants i cofibrants en l'estructura de models de Quillen sobre conjunts simplicials són els conjunts de Kan, els quals serveixen com a models combinatoris dels tipus d'homotopia dels espais topològics, a conseqüència del resultat anterior.

5 Categories enriquides

Entrem en el context en el qual definirem els ∞-grupoides: les categories enriquides (vegeu [7, apèndix A.1.3 i A.1.4] per als detalls). Els casos que ens interessen a nosaltres són les categories topològiques i les categories simplicials. Aquestes són objectes algebraics en els quals tenim una noció de morfismes de tots els ordres.

Definició 5.1. Una *categoria topològica* és una categoria enriquida sobre espais topològics (compactament generats i Hausdorff).

Demanem aquestes condicions tècniques sobre els espais amb la finalitat d'obtenir un functor fins a categories simplicials. En una categoria topològica $\mathcal{C}$, per a cada parell d'objectes x i y tenim un espai topològic $\mathcal{C}(x, y)$, els punts del qual podem pensar com a morfismes d'ordre 1. Si f i g són dos punts de l'espai topològic $\mathcal{C}(x, y)$, aleshores podem pensar un camí entre aquests dos com a un morfisme d'ordre 2. Vegeu la il·lustració a mà dreta.



En general, un morfisme d'ordre n de $\mathcal{C}$, per a $n > 1$, és una homotopia (un camí quan $n = 2$) entre dos morfismes d'ordre $n - 1$ dins l'espai topològic corresponent.

Definició 5.2. Una *categoria simplicial* és una categoria enriquida sobre conjunts simplicials.

En una categoria simplicial $\mathcal{C}$, per a cada parell d'objectes x i y tenim un conjunt simplicial $\mathcal{C}(X, Y)$. Podem pensar els seus n-símplexs com a morfismes d'ordre $n+1$.

L'equivalència de Quillen descrita entre espais topològics i conjunts simplicials s'eleva a una equivalència de Quillen entre la categoria de les categories topològiques, denotada **tCat**, i la categoria de les categories simplicials, denotada **sCat**, amb versions "enriquides" de les estructures de models a **Top** i **sSet**, respectivament; tal estructura a **sCat** és l'estructura de models *de Bergner* [2]. Per exemple, vegeu la definició següent:

Definició 5.3. Diem que un functor enriquit $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categories topològiques és una *equivalència feble* si satisfà el següent:

- Per a cada parell d'objectes $X, Y \in \mathcal{C}$, el morfisme induït $\mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{D}(FX, FY)$ és una equivalència homotòpica feble entre espais topològics.
- Cada objecte de $\mathcal{D}$ és isomorf dins $\mathrm{h}\mathcal{D}$ a FX, per a algun $X \in \mathcal{C}$.

L'analogia amb espais topològics és clara: la definició donada és una versió feble de la noció d'equivalència de categories, de la mateixa manera que les equivalències homotòpiques febles ho són respecte a les equivalències homotòpiques. En definitiva, el resultat d'aquesta secció és el següent:

Teorema 5.4 (Amrani [1]). *L'adjunció* $|-| : \mathbf{sCat} \rightleftarrows \mathbf{tCat} : \mathrm{Sing}$ *és una equivalència de Quillen.*

6 ∞-grupoides

Ara podem definir els ∞-grupoides com a aquelles categories topològiques en les quals tot morfisme és invertible llevat de morfismes d'ordre superior o, en altres paraules, on tot morfisme té un invers *homotòpic*. Tot morfisme d'ordre més gran que 1 en una categoria topològica és una homotopia (un camí quan $n = 2$) en algun espai topològic i, per tant, té una inversa llevat d'homotopia, és a dir, és invertible llevat de morfismes d'ordre superior. Ens falta demanar el mateix per als morfismes d'ordre 1. Per a fer-ho és convenient la definició següent.

Definició 6.1. La *categoria homotòpica* $\mathrm{h}\mathcal{C}$ d'una categoria topològica $\mathcal{C}$ és defineix com segueix:

- Els seus objectes són els objectes de $\mathcal{C}$.
- Si X i Y són dos objectes de $\mathcal{C}$, definim $\mathrm{h}\mathcal{C}(X, Y) = \pi_0\mathcal{C}(X, Y)$.

Definició 6.2. Sigui $\mathcal{C}$ una categoria topològica. Diem que $\mathcal{C}$ és un ∞-*grupoide* si $\mathrm{h}\mathcal{C}$ és un grupoide.

Un *grupoide* és una categoria on tot morfisme és invertible. Per tant, la condició $\mathrm{h}\mathcal{C}$ garanteix que per a tot morfisme f existeix un morfisme g en direcció contrària tal que $g \circ f$ és a la mateixa component arc-connexa que la identitat en l'espai d'endomorfismes corresponent i semblantment amb $f \circ g$. És a dir, qualsevol morfisme d'ordre 1 també té un invers *homotòpic*.

La categoria dels ∞-grupoides i els functors topològicament enriquits serà denotada per ∞-**Grpd**. Ens referirem a la subcategoria plena de $\mathrm{Ho}(\mathbf{tCat})$ formada pels ∞-grupoides com a la *categoria homotòpica* dels ∞-grupoides i serà denotada per $\mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathbf{Grpd})$.

7 Complexos de Kan i ∞-grupoides

L'equivalència entre conjunts simplicials i categories simplicials és establerta pel functor *nervi coherent* N, que és una versió "enriquida" del nervi ordinari d'una categoria, i el seu adjunt per l'esquerra denotat $\mathfrak{C}$ (vegeu [7, § 1.1.5] per als detalls). Aquesta equivalència cobra sentit en el context de la teoria de categories d'ordre superior. Tant les quasicategories com les categories simplicials es poden prendre com a model de les anomenades ∞-*categories* i donen lloc a teories equivalents, i les més completes fins al moment.

Els conjunts simplicials admeten una estructura de models anomenada *de Joyal* [6, teorema 6.12]. És oportú remarcar que els objectes fibrants en aquesta estructura de models a **sSet** són les quasicategories, i les quasicategories tals que la seva *categoria homotòpica* [7, definició 1.1.5.14] és un grupoide són precisament els conjunts de Kan, els quals poden servir com a models combinatoris dels ∞-grupoides.

Les estructures de models de Joyal i de Quillen sobre conjunts simplicials són diferents, però a [8] hem demostrat que sobre els conjunts de Kan són suficientment semblants: les seves categories homotòpiques són isomorfes quan ens restringim als conjunts de Kan. En conseqüència, anomenem ambdues subcategories la *categoria homotòpica* dels conjunts de **Kan**, la qual denotem per $\mathrm{Ho}(\mathbf{Kan})$. El resultat següent formalitza l'equivalència enunciada i és un pilar dels fonaments de la teoria de categories d'ordre superior:

Teorema 7.1 (Lurie [7, teorema 2.2.5.1])**.** *L'adjunció* $(\mathfrak{C}, N)$ *és una equivalència de Quillen entre* **sSet** *amb l'estructura de models de Joyal i* **sCat** *amb l'estructura de models de Bergner.*

Corol·lari 7.2. *L'adjunció* $(|\mathfrak{C}|, N\,\mathrm{Sing})$ *és una equivalència de Quillen entre* **sSet** *amb l'estructura de models de Joyal i* **tCat** *amb l'estructura de models de* [1].

A [8] hem demostrat que aquesta es restringeix a una adjunció

$$|\mathfrak{C}| : \mathbf{Kan} \rightleftarrows \infty\text{-}\mathbf{Grpd} : N\,\mathrm{Sing}$$

on les components de la unitat i la counitat són equivalències febles i, en conseqüència, isomorfismes a les categories homotòpiques. Per tant, aquesta adjunció indueix una equivalència entre categories homotòpiques.

8 La hipòtesi d'homotopia

Reunint els resultats obtinguts fins al moment, tenim els functors

$$\mathbf{Top} \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|-|}{\leftrightarrows}} \mathbf{Kan} \underset{N\,\mathrm{Sing}}{\overset{|\mathfrak{C}|}{\rightleftarrows}} \infty\text{-}\mathbf{Grpd}$$

que indueixen equivalències de categories

$$\mathrm{Ho}(\mathbf{Top}) \underset{\mathrm{Sing}}{\overset{|-|}{\leftrightarrows}} \mathrm{Ho}(\mathbf{Kan}) \underset{N\,\mathrm{Sing}}{\overset{|\mathfrak{C}|}{\rightleftarrows}} \mathrm{Ho}(\infty\text{-}\mathbf{Grpd}).$$

Això conclou la demostració de la hipòtesi d'homotopia. En particular, hem trobat una manera d'associar a un topològic X un objecte algebraic que codifica el seu tipus d'homotopia: l'∞-grupoide $|\mathfrak{C}(\mathrm{Sing}\,X)|$.

9 L'∞-grupoide fonamental com a categoria topològica

Donat un espai topològic X, l'∞-grupoide $|\mathfrak{C}(\mathrm{Sing}\,X)|$ modelitza el seu tipus d'homotopia, però aquest no és transparent ni entenedor com desitjaríem. Ara proposem un model per a l'∞-grupoide fonamental, el qual denotarem per $\Pi_\infty(X)$, que creiem que és més manejable i intuïtiu, i veurem que també codifica el tipus d'homotopia de l'espai topològic.

Definició 9.1. Definim una categoria topològica $\Pi_\infty(X)$ com segueix:

- Els seus objectes són els punts de X.
- Si x i y són dos objectes, definim $\Pi_\infty(X)(x,y)$ com l'espai de *camins de Moore* de x a y:

$$\{(f,r) \in X^{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{R}_+ \mid f(0) = x,\ f(r) = y,\ \ f(s) = f(r) \text{ si } s \geq r\}.$$

- Si g és un camí que comença on acaba f, definim $(g,s) \circ (f,r)$ com $(f * g, r+s)$, on

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq r \\ g(t-r) & \text{si } t \geq r. \end{cases}$$

- El camí constant $(c_x, 0)$ de longitud 0 com a identitat.

La raó per la qual usem camins de Moore és que aquests ens permeten obtenir una concatenació de camins associativa, la qual no s'obté si usem reparametritzacions com és habitual. Prosseguim a comprovar la idoneïtat del model proposat.

Proposició 9.2. *La categoria topològica $\Pi_\infty(X)$ és un ∞-grupoide per a tot espai X.*

Demostració. Tot camí de Moore (f,r) té un invers homotòpic (g,r), on g recorre el mateix camí que f, però en sentit contrari. $\square$

Acabem amb el resultat que ens confirma que $\Pi_\infty(X)$ té el tipus d'homotopia adequat.

Teorema 9.3. *Els ∞-grupoides $|\mathfrak{C}(\operatorname{Sing} X)|$ i $\Pi_\infty(X)$ són categories topològiques feblement equivalents per a tot espai X.*

Demostració. Es basa en el fet que $\Pi_\infty(X)$ és feblement equivalent al monoide topològic $\Omega' X$ d'endomorfismes d'un punt x_0 quan X és arc-connex, on $\Omega' X$ denota l'espai de llaços de Moore. $\square$

En particular, $\Pi_\infty(X)$ codifica el tipus d'homotopia de l'espai X.

10 Conclusions

- Representar els ∞-grupoides com a categories topològiques permet donar una demostració molt adient de la hipòtesi d'homotopia de Grothendieck.
- El model $\Pi_\infty(X)$ de l'∞-grupoide fonamental d'un espai X definit mitjançant camins de Moore és fidel a la idea intuïtiva d'∞-grupoide fonamental i és equivalent al model que s'obté a partir de l'adjunció de Quillen $(\mathfrak{C}, N)$.

Referències

[1] I. Amrani, Model structure on the category of small topological categories, *J. Homotopy Relat. Struct.* 10 (2015), 63–70.

[2] J. E. Bergner, A model category structure on the category of simplicial categories, *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007), 2043–2058.

[3] P. G. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1999.

[4] A. Grothendieck, À la poursuite des champs, carta no publicada a Quillen.

[5] M. Hovey, *Model Categories*, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[6] A. Joyal, The theory of quasi-categories and its applications, Lectures at CRM, Barcelona, 2008. Disponible a *https://mat.uab.cat/~kock/crm/hocat/advanced-course/Quadern45-2.pdf*.

[7] J. Lurie, *Higher Topos Theory*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton, 2009.

[8] J. McGarry, Homotopical realizations of infinity groupoids, Treball de fi de grau, Universitat de Barcelona, 2020.

[9] D. Quillen, *Homotopical Algebra*, Lecture Notes in Math., Vol. 43, Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg i Nova York, 1967.