LA PARADOXA DE BANACH-TARSKI

Autor:
Ignasi Guillén Mola
correu: ignasiguillen@gmail.com

Director:
Dr. Joan Carles Naranjo del Val

Departament de Matemàtiques i Informàtica.
Universitat de Barcelona.
30 de juliol de 2019

Resum

La paradoxa de Banach-Tarski assegura que és possible dividir una esfera i una bola tancada en un nombre finit de peces i obtenir dues còpies de l'objecte original fent servir només desplaçaments en l'espai com són les rotacions i les translacions.

El treball està estructurat en dues parts. La primera i principal tracta de la paradoxa de Banach-Tarski, i la segona, i molt més breu, és sobre el pla hiperbòlic. En la primera part es fa un estudi en detall de la demostració de la paradoxa de Banach-Tarski així com del nombre mínim de peces necessari per dur a terme la construcció, mentre que en la segona solament es dona un exemple per duplicar el pla hiperbòlic.

En la primera part es fa un estudi exhaustiu: des de fixar els axiomes amb què treballarem fins a acabar amb la demostració del resultat central del treball, en les seves dues versions. A part de demostrar la paradoxa, es veu una construcció explícita de les peces per a la duplicació, a més a més també demostrarem que la paradoxa no es pot realitzar físicament. Finalment, veurem que la paradoxa no és possible sense l'axioma de l'elecció.

Per fixar els fonaments sobre els quals treballarem es dona un llistat d'axiomes. És molt important fixar un context precís per treballar, i és per això que es comenta un cas en què les bases fallen, i així poder veure la necessitat d'establir un sistema d'axiomes que no portin a contradicció. Es comença comentant la contradicció que hi ha en la teoria de conjunts de Gottlob Frege, la qual s'anomena *paradoxa de Russell*. Així doncs, s'exposa un llistat d'axiomes, els anomenats *axiomes de Zermelo-Fraenkel*, o simplement *ZF*.

A part del llistat d'axiomes de Zermelo-Fraenkel, s'afegeix també l'axioma de l'elecció (Axiom of Choice), i a tots aquests axiomes els anomenem de forma abreujada *ZFC* (ZF + Choice), i és a partir d'aquests que es construeix tota la demostració de la paradoxa.

Just després de fixar els axiomes, cal fer una traducció del llenguatge parlat al llenguatge matemàtic. Ja no ens serveix dir que es poden duplicar pilotes o taronges, sinó que ara hem de fixar correctament el que volem mitjançant les eines matemàtiques.

Un cop feta aquesta transició cap al formalisme, ja podem començar a definir els conceptes que farem servir a partir d'ara. El primer concepte, i més important, d'aquest treball és

el següent:

Definició. *Sigui un grup G que actua sobre un conjunt X, i un subconjunt $E \subseteq X$. Diem que E és G-paradoxal, o paradoxal respecte a G, si hi ha $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subseteq E$ disjunts dos a dos, i $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ amb $n, m > 0$ enters tal que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} g_i(A_i) = E = \bigcup_{i=1}^{m} h_i(B_i)$$

D'aquesta forma, la paradoxa de Banach-Tarski a partir d'ara és equivalent als dos teoremes següents:

Teorema (La paradoxa de Banach-Tarski - Versió esfera)**.** *S^2 és SO_3-paradoxal.*

Teorema (La paradoxa de Banach-Tarski - Versió bola tancada)**.** *E^3 és paradoxal respecte als desplaçaments de l'espai.*

Recordem que els desplaçaments de $\mathbb{R}^3$ són les transformacions afins que mantenen la distància. Nosaltres només considerem les que mantenen l'orientació (directes). SO_3 s'identifica amb els desplaçaments directes que deixen fix l'origen.

Per començar a desenvolupar la demostració, el primer objectiu és fer un estudi de diferents conjunts paradoxals respecte a un grup adient, i en concret, el primer teorema important del treball és el següent:

Teorema. *Un grup lliure generat per un conjunt de dos elements és paradoxal en ell mateix.*

Aquest teorema juntament amb un resultat sobre grups paradoxals (en ells mateixos) actuant sobre un conjunt, ens permet ràpidament obtenir la paradoxa de Hausdorff:

Teorema (Paradoxa de Hausdorff)**.** *Hi ha un subconjunt numerable D de S^2 tal que $S^2 \setminus D$ és SO_3-paradoxal.*

La paradoxa de Hausdorff és un resultat molt important i que ens serveix com a pas previ per demostrar la paradoxa de Banach-Tarski. Ara, havent demostrat la paradoxa de Hausdorff, el que voldríem és eliminar el conjunt D del teorema i així obtenir que S^2 és SO_3-paradoxal. Per començar en el procés, per passar de Hausdorff a Banach-Tarski, comencem definint el concepte següent:

Definició. *Sigui G un grup que actua sobre X, i $A, B \subset X$. Es diu que A i B són G-congruents per peces (usant n peces) si existeixen $A_1, \ldots, A_n \subset A$ disjunts dos a dos, $B_1, \ldots, B_n \subset B$ disjunts dos a dos, amb*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

i $g_1, \ldots, g_n \in G$ tals que $g_i(A_i) = B_i$ per tot $i \in \{1, \ldots, n\}$

Escrivim $A \sim_G B$ per dir que A i B són G-congruents per peces. A més a més, escriurem $A \sim_n B$ per dir que són G-congruents usant n peces. Especificar el nombre de peces usades és una definició més específica, i per tant $A \sim_n B \Longrightarrow A \sim_G B$.

Aquest concepte que relaciona dos conjunts és una relació d'equivalència, i aquest fet ens permet més llibertat de treball. De fet, la propietat que un conjunt sigui paradoxal respecte a un grup es transmet per conjunts congruents per peces, és a dir,

$$\left.\begin{array}{c} A \sim_G B \\ A \text{ és } G\text{-paradoxal} \end{array}\right\} \Longrightarrow B \text{ és } G\text{-paradoxal}$$

Amb aquest resultat, tan sols ens cal veure $S^2 \sim_{SO_3} S^2 \setminus D$, on D és un subconjunt numerable. Aquest fet és cert, i per tant ja tenim demostrada la paradoxa per al cas de l'esfera.

A continuació, ens preguntem si la bola tancada també es pot duplicar fent servir elements de SO_3, i la resposta és que no. Per tant, si es pot duplicar amb desplaçaments de l'espai, s'han de contemplar altres desplaçaments diferents de les rotacions. Ara, podem veure $E^3 \setminus \{0\} = S^2 \times [0,1)$, i automàticament tenim que $E^3 \setminus \{0\}$ és SO_3-paradoxal. Per tant, si volem fer el mateix procés que abans, el que necessitaríem veure ara és que $E^3 \sim E^3 \setminus \{0\}$ mitjançant tots els desplaçaments directes de l'espai, no només les rotacions centrades en l'origen com fèiem per al cas de l'esfera. Es prova que això és cert, i per tant, també hem obtingut la paradoxa per al cas de la bola tancada.

A part d'aquests dos resultats, també es veu un resultat general de la paradoxa de Banach-Tarski.

Teorema (La paradoxa de Banach-Tarski - Versió general)**.** *Qualssevol dos subconjunts acotats de $\mathbb{R}^3$ amb interior no buit són congruents per peces usant desplaçaments de l'espai.*

Concretament, la versió general de la paradoxa té com a corol·lari el resultat següent:

Corol·lari ("The Pea and the Sun Paradox")**.** *Un pèsol es pot trencar en un nombre finit de peces, i moure-les per l'espai per obtenir el sol.*

Un cop arribats al final de la demostració del resultat principal del treball en les seves dues versions, la primera pregunta que sorgeix és sobre quantes peces són necessàries, com a mínim. En aquest capítol es formula una definició per comptar exactament l'eficiència d'una duplicació, i així tenir el nombre de peces usades ben definit. La definició del nombre de peces és la següent:

Definició. *Diem que un conjunt X és G-paradoxal usant l peces si existeixen subconjunts $A, B \subset X$ disjunts amb $A \cup B = X$ tals que $A \sim_n X \sim_m B$ amb $l = n + m$.*

Amb aquesta definició ens posem a fer el recompte de peces usades en les demostracions vistes fins ara, i en els dos casos de la paradoxa en surten 16. Aquest nombre es pot millorar. De fet, es veu que S^2 és SO_3-paradoxal usant 4 peces, i la bola tancada E^3 és paradoxal respecte als desplaçaments de l'espai fent-ne servir 5. És a dir, s'obtenen els dos resultats següents.

Teorema. *S^2 és SO_3-paradoxal fent servir 4 peces, i no ho és amb menys peces.*

Teorema. *La bola tancada E^3 és paradoxal respecte als desplaçaments de l'espai fent servir 5 peces, i no ho és amb menys peces.*

La segona pregunta que es tracta és sobre la possibilitat de duplicar objectes en el món físic. Es fa una introducció de la mesura de Lebesgue i s'obtenen uns resultats, que posteriorment ens permetran saber que la paradoxa no és possible físicament. La idea és que en el món físic les peces són mesurables i que la mesura de la unió disjunta és la suma de mesures.

Per finalitzar la part principal del treball, es tracta molt breument el paper de l'axioma de l'elecció per assolir la paradoxa, i s'arriba a la conclusió que sense l'axioma de l'elecció no és possible obtenir la paradoxa de Banach-Tarski.

Per acabar el treball, hi ha una segona part molt més curta, en la qual solament es vol donar un exemple d'un conjunt que es pot duplicar mitjançant isometries dins del mateix espai. Aquest espai és el famós pla hiperbòlic. En aquest exemple, s'usen un total de 4 peces, de les quals en podem donar una forma explícita sense usar l'axioma de l'elecció, mentre que en la paradoxa de Banach-Tarski, les peces de l'esfera i la bola tancada no són gens intuïtives.