# Teories quàntiques de camps topològiques

Jaume Baixas Estradé
jaume@baixas.cat

Departament de Matemàtiques i Informàtica,
Universitat de Barcelona.

23 de gener de 2021

**Resum:** Les teories quàntiques de camps topològiques són functors de la categoria de bordismes a la categoria d'espais vectorials que preserven la seva estructura monoidal. Aquests functors aparegueren en la física, però s'ha demostrat la seva utilitat en altres àrees de les matemàtiques.

Aquí es presenta un breu resum del treball final de grau de l'autor, [Bai], on es pretén capturar l'essència del treball sense aprofundir en els detalls.

> [...]
> Però entretant evita alguns transtorns,
> posant-te ben cordats els .
> — Salvador Espriu, *I beg your pardon*

## Introducció

Les teories quàntiques de camps topològiques (d'ara endavant TQFTs, de l'anglès *topological quantum field theories*) foren introduïdes pel físic teòric E. Witten a l'article [Wit], el 1988, amb l'objectiu d'establir una connexió entre la física quàntica i la topologia de l'espai-temps. Poc després, el matemàtic M. Atiyah axiomatitzà rigorosament aquest concepte en termes purament matemàtics (vegeu [Ati]).

La manera elegant de descriure les TQFTs és mitjançant la teoria de categories, una branca de les matemàtiques amb l'objectiu essencialment d'establir patrons i similituds entre diverses estructures matemàtiques. Una *categoria* consisteix en una col·lecció d'*objectes* (que poden ser, per exemple, conjunts, espais vectorials, espais topològics) i una col·lecció de *morfismes* (que normalment són aplicacions que preserven l'estructura dels objectes, però que poden ser d'una altra naturalesa, com veurem amb els bordismes). Aquesta noció de morfisme es pot generalitzar a la de *functor*: aplicacions entre categories. Dins d'aquest marc teòric, les TQFTs són functors de la categoria de bordismes[1] a la categoria d'espais vectorials.[2]

Ambdues categories tenen estructura *monoidal simètrica*: això vol dir en essència que s'hi pot definir un producte (anomenat *producte tensorial*) que compleixi les condicions que usualment s'esperen d'un producte: l'associativitat, la commutativitat i l'existència d'una unitat (o element neutre). Una TQFT, com veurem, és un functor entre aquestes dues categories que preservi l'estructura monoidal simètrica.

Mentre que l'interès de les TQFTs rau en el fet que permeten estudiar varietats en altes dimensions, en dimensions baixes –1 i 2– ja es coneix una classificació completa de les varietats diferenciables; per tant, podem usar aquests resultats per entendre les TQFTs en aquestes dimensions i determinar la seva estructura. Aquest és precisament el nucli del treball: es demostra una correspondència entre les TQFTs de dimensió 1 i els espais vectorials finits, i entre les TQFTs de dimensió 2 i les àlgebres de Frobenius.

[1] La categoria de bordismes té per objectes varietats diferenciables i per morfismes els *bordismes*: grosso modo, un bordisme de $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$ és una varietat diferenciable amb la unió disjunta $\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ com a vora.

[2] És a dir, aquella que té per objectes els espais vectorials i per morfismes les aplicacions lineals.

Una *àlgebra de Frobenius* és un espai vectorial finit dotat de certes operacions internes (multiplicació, unitat, comultiplicació i counitat) tals que se satisfacin simultàniament els axiomes d'àlgebra i els de coàlgebra d'una forma compatible; específicament, s'exigeix una condició coneguda com a *relació de Frobenius*. Aquest tipus d'estructura es comprèn més fàcilment de forma visual, traduint totes quatre operacions als palpables bordismes de dimensió 2. Per exemple, la multiplicació $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ es pot representar amb el bordisme per antonomàsia: un *parell de pantalons*.

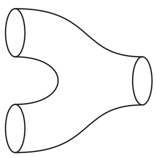


**Figura 1:** Un parell de pantalons.

## Bordismes

Per explicar què és un bordisme, partim del concepte de *varietat infinitament diferenciable* o $\mathcal{C}^\infty$. Si bé la definició és força tècnica, ens és suficient dir que una varietat infinitament diferenciable és una varietat topològica que admet una estructura diferencial global. A més a més, requerirem que les varietats siguin orientables (per exemple, en dimensió 2 descartarem varietats com l'ampolla de Klein i el pla projectiu), i permetrem que tinguin vora (és a dir, si la definició usual de varietat imposa que aquesta sigui localment euclidiana, nosaltres permetrem que sigui localment homeomorfa al semiespai $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_n \geq 0\}$).

Donades dues varietats orientables i sense vora $\Sigma_1$ i $\Sigma_2$, diem que un **bordisme** de $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$ és una varietat orientable d'una dimensió superior amb la unió disjunta $\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ com a vora. Per a una definició rigorosa, vegeu [Bai, §2.5]. $\Sigma_1$ s'anomena *vora interior* i $\Sigma_2$, *vora exterior*.

Quan representem bordismes, dibuixarem les vores interiors a l'esquerra i les vores exteriors a la dreta, per exemple:

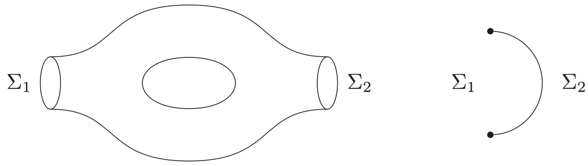



**Figura 2:** Dos bordismes de dimensió 2 i 1 respectivament. Observeu que en el segon cas la vora exterior és el conjunt buit.

Es construeix la **categoria de bordismes** de dimensió $n$, que denotem $\mathbf{Bord}_n$, de la manera següent:

- Els objectes $\Sigma$ són varietats sense vora orientades de dimensió $n-1$.
- Els morfismes $M : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ són els bordismes de $\Sigma_1$ a $\Sigma_2$.
- Les identitats $1_\Sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ són els *cilindres* $C_\Sigma := \Sigma \times [0,1]$.
- La composició $N \circ M : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_3$ de dos morfismes $M : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ i $N : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_3$ és el bordisme que resulta d'"enganxar" $M$ i $N$ per la vora comuna.

Per ser més precisos, hauríem de refinar aquesta definició considerant classes d'equivalència de bordismes (dos bordismes essent equivalents si i només si hi ha un difeomorfisme entre ells que deixi fixes les vores). Vegeu [Bai, §2.6] per als detalls.

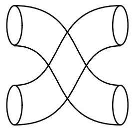
Aquesta categoria té estructura monoidal simètrica. Una **categoria monoidal simètrica** és una categoria $\mathcal{M}$ equipada amb dos functors $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ (**producte tensorial**) i $I : \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{M}$ (**unitat**) i isomorfismes naturals

$$\begin{gathered}(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C), \\ I \otimes A \cong A \cong A \otimes I \quad \text{i} \\ A \otimes B \cong B \otimes A.\end{gathered}$$

S'imposen certes condicions, conegudes com a *condicions de coherència*, que garanteixen que en efecte aquesta estructura sigui anàloga a la del producte (associatiu, commutatiu i amb unitat). Un exemple senzill és la categoria dels $\mathbb{k}$-espais vectorials, $\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$, on $\otimes$ és el producte tensorial estàndard, $I$ és el cos $\mathbb{k}$ i l'últim isomorfisme de la llista anterior –anomenat braiding *simètric*– és

$$\begin{aligned}\sigma_{V,W} : V \otimes W &\longrightarrow W \otimes V \\ v \otimes w &\longmapsto w \otimes v.\end{aligned}$$

En $\mathbf{Bord}_n$, la unió disjunta $\sqcup$ adopta el paper de producte tensorial i el conjunt buit $\varnothing$, entès com a $n$-varietat, adopta el d'unitat. El *braiding* simètric, en aquest cas és el *bordisme de* twist $T_{\Sigma,\Pi}$:

$\Sigma \sqcup \Pi$  $\Pi \sqcup \Sigma$

## Teories quàntiques de camps topològiques

Un functor monoidal simètric és bàsicament un functor que preserva l'estructura monoidal simètrica de les categories, és a dir que hi ha isomorfismes naturals

$$\begin{gathered}F(A) \otimes_2 F(B) \cong F(A \otimes_1 B) \quad \text{i} \\ I_2 \cong F(I_1).\end{gathered}$$

Aquests tipus de functors ja s'han usat prèviament: una construcció fonamental en topologia algebraica que precedí les TQFTs és el functor d'homologia singular. Aquest tipus d'estructures és extremadament útil a l'hora de classificar espais topològics: si dos espais topològics difereixen en les seves imatges sota aquests functors, no poden ser homeomorfs.

**Definició 1.** Una **TQFT de dimensió** $\boldsymbol{n}$ és un functor monoidal simètric

$$\mathcal{Z} : (\mathbf{Bord}_n, \sqcup, \varnothing, T) \longrightarrow (\mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}, \otimes, \mathbb{k}, \sigma).$$

Aquesta definició de les TQFTs es resumeix en les propietats següents:

- $\mathcal{Z}(1_\Sigma) = 1_{\mathcal{Z}}(\Sigma)$.
- $\mathcal{Z}(N \circ M) = \mathcal{Z}(N) \circ \mathcal{Z}(M)$.
- $\mathcal{Z}(\Sigma \sqcup \Pi) = \mathcal{Z}(\Sigma) \otimes \mathcal{Z}(\Pi)$.
- $\mathcal{Z}(M \sqcup N) = \mathcal{Z}(M) \otimes \mathcal{Z}(N)$.
- $\mathcal{Z}(\varnothing) = \mathbb{k}$.
- $\mathcal{Z}(T_{\Sigma,\Pi}) = \sigma_{\mathcal{Z}(\Sigma),\mathcal{Z}(\Pi)}$.

Podem considerar una nova categoria: $\mathbf{TQFT}_n^{\mathbb{k}}$. En aquesta categoria els objectes són les TQFTs i els morfismes són les transformacions naturals[3] entre elles.

[3]Una transformació natural entre dos functors és essencialment una aplicació que preserva l'estructura interna, és a dir la composició de morfismes, de les categories implicades.

## Presentació de $\mathbf{Bord}_2$

Volem estudiar l'estructura de les categories de TQFTs en dimensions baixes. En aquest resum només mostrarem esquemàticament la demostració del teorema d'equivalència en dimensió 2: $\mathbf{TQFT}_2^{\Bbbk}$ és equivalent a la categoria d'àlgebres de Frobenius.[4]

Primer considerem el concepte de *presentació d'una categoria monoidal simètrica* $\mathcal{M}$, anàleg al de presentació d'un grup: consta d'una terna $(O, G, R)$ definida de manera que

(1) tot objecte de $\mathcal{M}$ sigui isomorf a un objecte de $O$;

(2) tot morfisme de $\mathcal{M}$ es pugui expressar de la forma

$$f = (g_1^1 \otimes \cdots \otimes g_1^{r_1}) \circ \cdots \circ (g_n^1 \otimes \cdots \otimes g_n^{r_n})$$

amb $g_i^j \in G$; i

(3) tota igualtat de la forma

$$(g_1^1 \otimes \cdots \otimes g_1^{r_1}) \circ \cdots \circ (g_n^1 \otimes \cdots \otimes g_n^{r_n}) = (h_1^1 \otimes \cdots \otimes h_1^{r_1}) \circ \cdots \circ (h_m^1 \otimes \cdots \otimes h_m^{r_m})$$

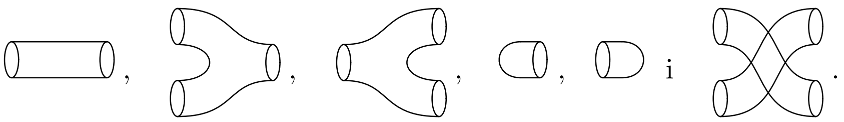
es pugui deduir a partir de les igualtats de $R$.

La gràcia de presentar una categoria mitjançant $(O, G, R)$ és que tot functor monoidal simètric $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ està únicament determinat per les imatges de $O$ i $G$, suposant que les relacions segueixen essent vàlides, és a dir, que si $f = g$ és una relació de $R$, aleshores $F(f) = F(g)$ a $\mathcal{N}$.

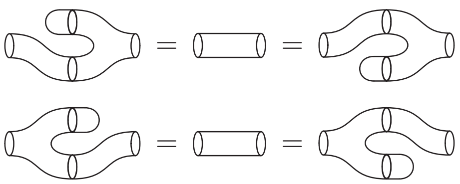
En el nostre cas, la presentació de $\mathbf{Bord}_2$ consta del següent:

(1) Els objectes de $O$ són unions disjuntes de $\mathbb{S}^1$.

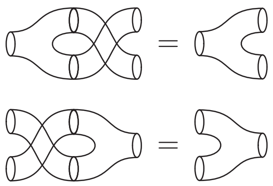
(2) Es pot demostrar, mitjançant la classificació de superfícies compactes orientables[5], que els generadors de $G$ són:



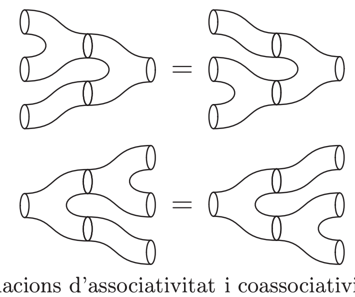
(3) De totes les relacions de $R$, només en mostrem, per temes d'espai, aquelles que són inherents a l'estructura de $\mathbf{Bord}_2$, ometent les que són conseqüència de l'estructura monoidal simètrica de qualsevol categoria:[6]



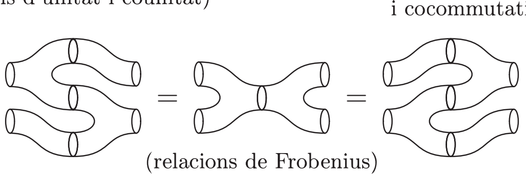
(relacions d'unitat i counitat)



(relacions de commutativitat i cocommutativitat)



(relacions d'associativitat i coassociativitat)



(relacions de Frobenius)

---

[4]En el cas unidimensional, es demostra que la categoria de les TQFTs és equivalent a la categoria d'espais vectorials finits amb els isomorfismes com a morfismes.

[5]És a dir, que tota superfície compacta orientable connexa ve unívocament determinada pel seu gènere (el nombre de "forats"), i que per tant tot 2-bordisme connex ve determinat pel gènere i el nombre de vores interiors i exteriors. Això prova que els 5 primers generadors de la llista generen tot bordisme connex. Per a la resta, és suficient observar que tot bordisme es pot descompondre en tres parts: la central consta d'unions disjuntes de bordismes connexos, mentre que les laterals consten de certs *bordismes de permutació*: bordismes que únicament permuten les vores, i que per tant són generats pel bordisme de *twist*, de la mateixa manera que el grup simètric $\mathfrak{S}_n$ és generat per transposicions.

[6]Són certes relacions que involucren el cilindre i el *twist* i que posen de manifest les propietats de la identitat en tota categoria i del *braiding* simètric en tota categoria monoidal simètrica, respectivament.

## Àlgebres de Frobenius

Si bé la definició clàssica de les àlgebres de Frobenius[7] difereix de la que es presenta a continuació, al TFG ([Bai, §4.2-§4.4]) es demostra detalladament l'equivalència entre ambdues definicions.

**Definició 2.** Una $\Bbbk$**-àlgebra de Frobenius** és un $\Bbbk$-espai vectorial $A$ equipat amb quatre aplicacions lineals $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ (anomenada **multiplicació**), $\delta : A \longrightarrow A \otimes A$ (**comultiplicació**), $\eta : \Bbbk \longrightarrow A$ (**unitat**) i $\varepsilon : A \longrightarrow \Bbbk$ (**counitat**) tals que

(1) $(A, \mu, \eta)$ sigui una $\Bbbk$**-àlgebra**, és a dir, $\mu$ sigui associativa i $\eta$ sigui la unitat de $\mu$; en altres paraules, que els diagrames següents commutin:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \otimes A \arrow[dl, "\mu\otimes 1_A"'] \arrow[dr, "1_A\otimes\mu"] & \\
A \otimes A \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\
\Bbbk \otimes A \arrow[ur, "\eta\otimes 1_A"] \arrow[rr, equal] & & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \otimes \Bbbk \arrow[ur, "1_A\otimes\eta"] \arrow[rr, equal] & & A
\end{tikzcd}$$

(2) $(A, \delta, \varepsilon)$ sigui una $\Bbbk$**-coàlgebra**, és a dir, $\delta$ sigui coassociativa i $\varepsilon$ sigui la counitat de $\delta$:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\
A \otimes A \arrow[dr, "\delta\otimes 1_A"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "1_A\otimes\delta"] \\
 & A \otimes A \otimes A &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dr, "\varepsilon\otimes 1_A"] & \\
A \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, equal] & & \Bbbk \otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dr, "1_A\otimes\varepsilon"] & \\
A \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, equal] & & A \otimes \Bbbk
\end{tikzcd}$$

(3) $\mu$ i $\delta$ satisfacin la **relació de Frobenius**:

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \otimes A \arrow[dr, "1_A\otimes\mu"] & \\
A \otimes A \arrow[ur, "\delta\otimes 1_A"] \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "1_A\otimes\delta"'] & A \arrow[r, "\delta"] & A \otimes A \\
 & A \otimes A \otimes A \arrow[ur, "\mu\otimes 1_A"'] &
\end{tikzcd}$$

L'interès que té aquesta definició és que les similituds que presenten les àlgebres de Frobenius amb les relacions de $\mathbf{Bord}_2$ de la pàgina anterior queden paleses.

Ens restringim a àlgebres de Frobenius commutatives usant la noció següent:

**Definició 3.** Una $\Bbbk$-àlgebra $(A, \mu, \eta)$ [resp. $\Bbbk$-coàlgebra $(A, \delta, \varepsilon)$] és **commutativa** [resp. **cocommutativa**] si

[7] Aquesta primera definició (donada per R. Brauer i C. Nesbitt el 1937) essencialment diu que una àlgebra de Frobenius és una $\Bbbk$-àlgebra finita $A$ equipada amb una aplicació lineal $\varepsilon : A \longrightarrow \Bbbk$ tal que el seu nucli, $\mathrm{null}(\varepsilon) := \{a \in A | \varepsilon(a) = 0\}$, no contingui cap ideal per l'esquerra.

$$
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \otimes A \arrow[ur, "\sigma_A"] \arrow[rr, "\mu"'] & & A
\end{tikzcd}
\qquad
\left[ \text{resp.} \quad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dr, "\sigma_A"] & \\
A \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "\delta"'] & & A \otimes A
\end{tikzcd}
\right].
$$

Es pot demostrar que una àlgebra de Frobenius és commutativa si i només si és cocommutativa. D'aquesta manera podem considerar la categoria d'aquest tipus d'àlgebra, $\mathbf{cFA}_{\Bbbk}$, on els morfismes són els *homomorfismes d'àlgebres de Frobenius*, aplicacions lineals que preserven l'estructura.[8]

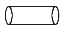
Com hem esmentat anteriorment, el teorema principal del TFG és el següent:

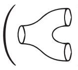
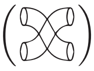
**Teorema 4.** *Hi ha una equivalència monoidal simètrica de categories* $\mathbf{TQFT}_2^{\Bbbk} \simeq \mathbf{cFA}_{\Bbbk}$.

La demostració consisteix fonamentalment a establir un functor monoidal simètric invertible entre ambdues categories, és a dir, una correspondència bijectiva entre 2-TQFTs i àlgebres de Frobenius (i entre transformacions naturals de 2-TQFTs i homomorfismes d'àlgebres de Frobenius). Aquesta correspondència és força intuïtiva donats els resultats anteriors:

$\mathcal{Z}(\mathbb{S}^1 \sqcup \overset{n}{\cdots} \sqcup \mathbb{S}^1) \longleftrightarrow A \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes A$

$\mathcal{Z}($$) \longleftrightarrow \mu : A \otimes A \longrightarrow A$ $\qquad$ $\mathcal{Z}($$) \longleftrightarrow \varepsilon : A \longrightarrow \Bbbk$

$\mathcal{Z}($$) \longleftrightarrow \eta : \Bbbk \longrightarrow A$ $\qquad$ $\mathcal{Z}($$) \longleftrightarrow 1_A : A \longrightarrow A$

$\mathcal{Z}($$) \longleftrightarrow \delta : A \longrightarrow A \otimes A$ $\qquad$ $\mathcal{Z}($$) \longleftrightarrow \sigma_A : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$

Fixem-nos que les relacions de la pàgina 4 impliquen les propietats de la definició d'àlgebra de Frobenius, i viceversa.

## Petita digressió en física

A tall de colofó, intentarem donar una idea intuïtiva de la relació entre el que s'ha exposat i la física que va portar al desenvolupament de les TQFTs. Si el lector hi està interessat, l'article de J. Baez [Bae] aprofundeix en el tema de manera força accessible.

Sota la suposició que l'espai-temps no té una topologia fixa, s'usen varietats de dimensió $n$ per modelar-lo i subvarietats d'una dimensió menys per modelar l'espai en un instant donat. Per tant, un bordisme pot representar l'evolució de l'espai al llarg del temps. Per exemple, el parell de pantalons de la figura 1 podria correspondre a la col·lisió de dos espais diferents que es fonen en un de nou. Per altra banda, podem establir una connexió entre estats quàntics i espais vectorials: de fet, la física quàntica es formula mitjançant els espais de Hilbert (un cas especial de $\mathbb{C}$-espais vectorials), on cada vector unitari està associat a un possible estat d'un sistema quàntic.

L'espai-temps (entès com a bordisme) i els espais de Hilbert tenen certes propietats comunes. Al TFG s'observa com sengles categories tenen una estructura més enllà de la de monoidal simètrica: la de †-categoria. Tots aquests són motius per pensar que les TQFTs són, en efecte, una bona eina per establir connexions entre relativitat general i física quàntica.

## Referències


[Ati] Atiyah, M. F. Topological quantum field theories. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **68**:175–186, 1988.

[Bae] Baez, J. Quantum quandaries: a category-theoretic perspective. In *The structural foundations of quantum gravity*, pages 240–265. Oxford University Press, Oxford, 2006.

[Bai] Baixas, J. *Topological Quantum Field Theories.* Treball Final de Grau, Universitat de Barcelona, 2020.

[Wit] Witten, E. Topological quantum field theory. *Comm. Math. Phys.*, **117**(3):353–386, 1988.


[8] És a dir, aplicacions lineals $f : A \longrightarrow A$ tals que $f \circ \mu = \mu \circ (f \otimes f)$, $(f \otimes f) \circ \delta = \delta \circ f$, $f \circ \eta = \eta$ i $\varepsilon = \varepsilon \circ f$.