

# BIFURCACIONS DE HOPF I DE NEIMARK-SACKER

MSC2020 - 34C23, 34K18, 37G05, 37G10

Autora:  
**Núria Camí i Cervelló**  
caminuria@gmail.com

Director:  
**Ernest Fontich i Julià**

Departament de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona  
21 de gener de 2021

## 1 Introducció i conceptes bàsics

Un dels problemes fonamentals en l'estudi de sistemes dinàmics no-lineals és saber si el comportament d'un sistema canvia sota una variació petita de pertorbacions. A grans trets, quan la dinàmica d'un sistema canvia, es diu que ha ocorregut una *bifurcació*.

En el que segueix, es recomana estar mínimament familiaritzat amb la noció bàsica *d'equació diferencial ordinària*, així com conèixer els elements bàsics dels *sistemes dinàmics*: **espai de fase**, **òrbita**, **retrat de fase**... A més, la distinció entre el cas *continu* i *discret* de temps ha requerit la utilització de vocabulari específic per a cada cas. Per exemple, per a temps continu es parla de **punts d'equilibri** i de **cicles límit** (també coneguts com a òrbites periòdiques aïllades), mentre que en temps discret es tenen **punts fixos** i **corbes tancades invariants**, respectivament.

Generalment, en el treball s'han considerat sistemes dinàmics no-lineals definits en oberts de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , autònoms i uniparamètrics. Tot seguit s'introdueixen alguns conceptes que són essencials per a l'anàlisi de les dues grans protagonistes del projecte: les bifurcacions de Hopf i les de Neimark-Sacker.

### Equivalència i conjugació topològica

Fixat un valor del paràmetre  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ , si el fem variar, el retrat de fase també canvia de manera simultània. D'aquí n'apareixen dos possibles escenaris: que el sistema resultant sigui topològicament equivalent a l'original o, per contra, que no ho sigui.

De manera informal, que dos sistemes siguin **topològicament equivalents** fa referència al fet que tinguin comportaments "qualitativament similars" a nivell topològic. Si bé és cert que la noció **d'equivalència topològica** s'empra per al cas continu de temps, per al cas discret s'utilitza la de **conjugació topològica**, la qual és una condició més restrictiva però utilitzada per al mateix propòsit.

L'avantatge principal que dos sistemes compleixin aquesta propietat és que els seus retrats de fase presenten la mateixa estructura topològica, fet que permet estudiar la dinàmica qualitativa d'un d'ells a partir de la de l'altre.

### Bifurcació, diagrama de bifurcació i codimensió

En general, els sistemes dinàmics indexats per paràmetres poden presentar diversos tipus de bifurcacions, és a dir, canvis qualitius a nivell topològic en l'estructura de les òrbites sota una variació petita de certs valors dels paràmetres, anomenats **valors crítics de bifurcació**. L'estudi de bifurcacions és, per tant, determinant per entendre el comportament del sistema.

**Definició 1.1.** L'aparició d'un retrat de fase fruit d'una variació del paràmetre que no sigui topològicament equivalent a l'original s'anomena **bifurcació**.

**Definició 1.2.** El **diagrama de bifurcació** d'un sistema dinàmic és una estratificació de l'espai de paràmetres on es representa el retrat de fase per a cada valor del paràmetre.

La **codimensió** d'una bifurcació és, en essència, el nombre de condicions que determinen la bifurcació i que fan possible la descripció de la dinàmica en el seu entorn. Aquestes s'anomenen **condicions de bifurcació** i són pròpies de cada bifurcació.

**Proposició 1.3.** La codimensió de les bifurcacions de Hopf i de Neimark-Sacker és 1.

Per a la **bifurcació de Hopf**, serà necessari que en els valors propis (vaps) resultants d'avaluar l'equilibri a la matriu jacobiana del sistema hi hagi exactament una parella d'imaginaris purs, és a dir, amb part real nul·la (equilibri de tipus *no-hiperbòlic*). Anàlogament, per a la **bifurcació de Neimark-Sacker**, el requisit serà tenir un parell de vaps complexos d'un punt fix sobre el cercle unitat que siguin diferents de les arrels quadrades, cúbiques i quàrtiques de 1.

### Forma normal d'una bifurcació

El comportament qualitatiu d'aquestes bifurcacions ve determinat per una expressió polinomial anomenada **forma normal topològica** del sistema, que s'obté aplicant successius canvis de variables no-lineals al sistema original. Les formes normals, en general, no estan definides de manera única, ja que existeix certa variabilitat en el càlcul dels coeficients de les transformacions no-lineals. L'avantatge és que la seva expressió és més simple que la del mateix sistema i, per tant, són més fàcils de tractar.

Així, l'objectiu principal serà analitzar de quina manera un sistema genèric (amb termes fins a un cert ordre) que exhibeixi una bifurcació de Hopf o de Neimark-Sacker pot ser estudiat a partir de la seva forma normal topològica.

## 2 Bifurcació de Hopf en dimensió 2

En sistemes dinàmics continus generats per EDO's, una **bifurcació de Hopf** (o d'*Andronov-Hopf*) es correspon al naixement d'un cicle límit a partir d'un equilibri en el moment en què aquest canvia la seva estabilitat quan una (única) parella de valors propis creua l'eix imaginari.

### Forma normal topològica

La **forma normal topològica** de la bifurcació de Hopf en dimensió 2 ve donada pel següent sistema no-lineal dependent d'un paràmetre:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \quad (2.1)$$

que té un equilibri  $x = (x_1, x_2) = (0, 0) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$  amb vaps  $\lambda_{1,2}(\alpha) = \alpha \pm i$ , i satisfà la **condició de bifurcació** en  $\alpha = 0$ :  $\lambda_{1,2}(0) = \pm i$ .

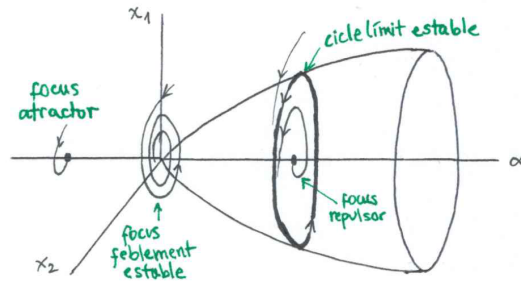
Mitjançant un parell de canvis de variable senzills s'obté un sistema en coordenades polars:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \xrightarrow[\substack{z=x_1+ix_2 \\ z \in \mathbb{C}}]{} \dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 \xrightarrow[\substack{z=\rho e^{i\phi} \\ \rho \geq 0}]{} \begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\phi} = 1, \end{cases}$$

el qual té un punt d'equilibri  $\rho = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ . D'aquí es dedueix el següent:

- i) Per a  $\alpha < 0$ , l'origen és *estable*, corresponent a un *focus atractor*.
- ii) Per a  $\alpha = 0$ , l'origen és el punt de bifurcació del sistema i és topològicament equivalent a un focus estable.
- iii) Per a  $\alpha > 0$ , l'origen és *inestable*, corresponent a un *focus repulsor*. A més, existeix un altre equilibri  $\rho_0(\alpha)$  que descriu un (únic) **cicle límit estable** al voltant de l'origen.

Així, el **diagrama d'una bifurcació de Hopf** queda representat de la manera següent:



### Bifurcació de Hopf genèrica

Un cop estudiada la bifurcació de Hopf a través de la forma normal, com es pot analitzar aquesta bifurcació en un sistema qualsevol de dimensió 2? A part de comprovar que satisfà la condició d'existència, és imprescindible el compliment de certes condicions suplementàries de genericitat.

**Teorema 2.1.** Considerem un sistema 2-dimensional continu en el temps,

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R},$$

on  $f \in C^4$  que, per a  $|\alpha|$  suficientment petit, té un equilibri  $x = 0$  amb vaps  $\lambda_{1,2}(\alpha) = \kappa(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ , on  $\kappa(0) = 0$  i  $\omega(0) = \omega_0 > 0$ . Suposem que se satisfan les **condicions de genericitat** següents:

- (I) (no-degeneració):  $l_1(0) \neq 0$ ,  $l_1(0) < 0$ , on  $l_1(\alpha)$  s'anomena *coeficient de Lyapunov*,
- (II) (transversalitat):  $\kappa'(0) \neq 0$ .

Aleshores, existeixen canvis de coordenades i paràmetres invertibles, i una reparametrizació del temps, que transforma el sistema original en:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|y\|^4), \quad \tau \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^2, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Observació.** Mitjançant un canvi de variable complexa es pot transformar a l'expressió equivalent:  $\dot{z} = (\beta + i)z - z|z|^2 + \mathcal{O}(|z|^4)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

**Lema 2.2.** El sistema  $\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 + \mathcal{O}(|z|^4)$  és localment topològicament equivalent a prop de l'origen a la forma normal en variable complexa:  $\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2$ .

El que és rellevant d'aquest resultat és que els termes d'ordre superior no afecten el comportament de la bifurcació del sistema. Així, coneixent el diagrama de bifurcació de (2.1), l'estudi de bifurcacions de Hopf en sistemes genèrics (fins a ordre qualsevol) és relativament fàcil d'interpretar un cop s'ha transformat a la seva forma normal.

### 3 Bifurcació de Neimark-Sacker en dimensió 2

En sistemes dinàmics discrets generats per aplicacions, una **bifurcació de Neimark-Sacker** fa referència a l'aparició d'una corba tancada invariant a partir d'un punt fix en el moment en què aquest canvia la seva estabilitat quan una (única) parella de valors propis complexos creua el cercle unitat.

### Forma normal topològica

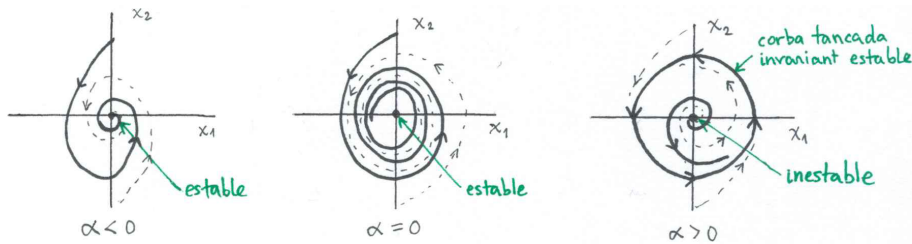
La **forma normal topològica** en variable complexa de la bifurcació de Neimark-Sacker en dimensió 2 ve donada pel següent sistema no-lineal dependent d'un paràmetre:

$$z \mapsto e^{i\theta} z(1 + \alpha + d_1 |z|^2), \quad z \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

on  $d_1(\alpha) = d(\alpha) + ib(\alpha) \in \mathbb{C}$ ;  $b(\alpha)$ ,  $d(\alpha)$  i  $\theta = \theta(\alpha)$  són funcions diferenciables en  $\alpha$ , amb  $0 < \theta(0) < \pi$ . Aquesta té un punt fix  $z = 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}$  amb vaps  $\mu_{1,2}(\alpha) = (1 + \alpha)e^{\pm i\theta(\alpha)}$ . En particular, per a  $\alpha = 0$ , se satisfà la **condició de bifurcació**:  $\mu_{1,2}(0) = e^{\pm i\theta(0)}$ .

Si s'analitza aquesta expressió, es poden identificar els trets bàsics del diagrama de bifurcació:

- i) Per a  $\alpha < 0$ , l'origen és linealment estable.
- ii) Per a  $\alpha = 0$ , l'origen és estable (no-linealment) i és el punt de bifurcació del sistema.
- iii) Per a  $\alpha > 0$ , l'origen és linealment inestable. A més, existeix un punt fix addicional, que dóna lloc a una (única) **corba tancada invariant** de caràcter estable que envolta l'origen.



Aparentment, la bifurcació de Hopf i de Neimark-Sacker comparteixen característiques comunes. No obstant això, veurem que les condicions de genericitat i la consegüent anàlisi qualitativa resulta ser significativament diferent.

### Bifurcació de Neimark-Sacker genèrica

Ara considerem un sistema 2-dimensional discret en el temps,

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R},$$

on  $f \in \mathcal{C}^4$  que, per a  $|\alpha|$  suficientment petit, té un punt fix  $x = 0$  amb vaps corresponents a  $\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\theta(\alpha)}$  amb  $r(0) = 1$  i  $\theta_0 := \theta(0)$ , és a dir, satisfent la condició de bifurcació.

**Teorema 3.1.** Assumim, a més, que se satisfan les **condicions de genericitat** següents:

- (I) (transversalitat):  $r'(0) \neq 0$ ,
- (II) (no-ressonància):  $e^{ik\theta_0} \neq 1$  per a  $k = 1, 2, 3, 4$ ,
- (III) (no-degeneració):  $d(0) \neq 0$ ,  $d(0) < 0$ .

Aleshores, existeixen canvis de coordenades i paràmetres invertibles que transformen el sistema original en:

$$z \mapsto e^{i\theta(\alpha)} z(1 + \alpha + d_1(\alpha)|z|^2) + \mathcal{O}(|z|^4), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.2)$$

A diferència del cas continu, quan treballem amb sistemes amb termes d'ordre superior, no és possible assegurar una conjugació topològica local entre (3.2) i la forma normal. Això és degut al fet que l'estructura de les òrbites que descriuen ambdós sistemes en  $\alpha > 0$  no és la mateixa. Tanmateix, es pot afirmar el resultat següent:

**Lema 3.2.** L'aplicació (3.2) té una corba tancada invariant de caràcter estable per a valors de  $\alpha > 0$  suficientment petits.

De tot plegat es dedueix que, malgrat que no es pugui capturar la dinàmica del sistema directament de la forma normal, queda garantida l'aparició d'una corba tancada invariant en un sistema genèric per a valors de  $\alpha > 0$ .

## 4 Generalització al cas n-dimensional

Finalment, el projecte conclou relacionant els resultats vistos en dimensió 2 amb el cas general de dimensió  $n$ , per a  $n > 2$ . En particular, la **bifurcació de Hopf en dimensió 3** resulta ser un exemple força intuïtiu per entendre què ocorre en dimensions superiors. Així mateix, els resultats que s'expliquen a continuació poden ser reformulats per a  $n > 3$ , per a sistemes dinàmics amb cas discret de temps i, inclús, per a sistemes amb més d'un paràmetre.

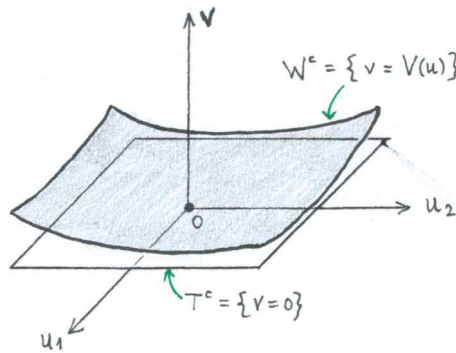
Considerem, per tant, el sistema continu 3-dimensional

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

i assumim que, en  $\alpha = 0$ , els vaps de l'equilibri  $x = 0$  són  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$ , amb  $\omega_0 > 0$ , i  $\lambda_3 < 0$ . Suposem que els vectors propis associats a  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  generen el pla  $T^c$ .

**Teorema 4.1.** Existeix una varietat localment invariant de dimensió 2 de (4.1),  $W^c := W_{loc}^c(0)$ , anomenada **varietat central**, que és tangent a  $T^c$  en  $x = 0$ . A més, les òrbites que es troben a prop de l'equilibri tendeixen a  $W^c$  en la corresponent direcció de temps.

La segona part del teorema s'interpreta com que la funció de  $W^c$  és “exhibir” o “projectar” les corresponents bifurcacions del sistema. Per tal d'imaginar-nos com és aquesta varietat, podem representar-la localment per la gràfica d'una funció diferenciable  $W^c = \{(u, v) : v = V(u)\}$ , on  $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , amb  $V(u) = \mathcal{O}(\|u\|^2)$ , i és tangent al pla  $T^c = \{v = 0\}$  en  $(u, v) = (0, 0)$ .



**Teorema 4.2 (Principi de reducció).** El sistema  $\dot{x} = f(x, 0)$  és localment topològicament equivalent a:

$$\begin{cases} \dot{z} = i\omega_0 z + g(z, \bar{z}), & z \in \mathbb{C}, \quad g = \mathcal{O}(|z|^2), \\ \dot{v} = -v, & v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

on la primera equació és la restricció de (4.1) a  $W^c$ .

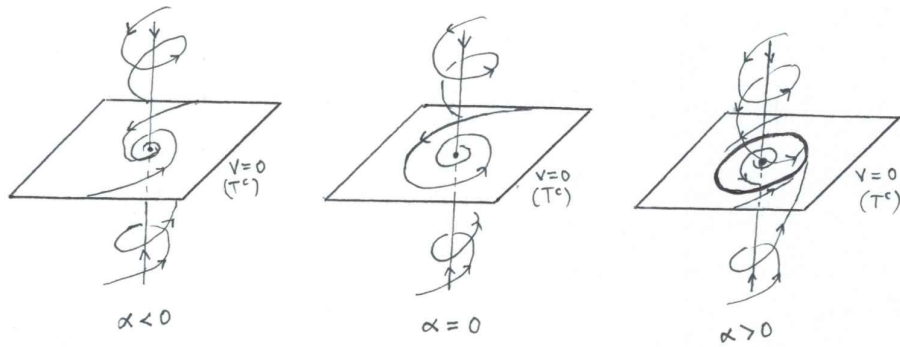
Aquest principi se sosté perquè el sistema (4.1) està avaluat en el valor crític de bifurcació  $\alpha = 0$ , que és precisament el valor per al qual existeix la varietat central  $W^c$ . Però, què passa per a valors de  $\alpha$  prou propers a zero? Afortunadament, és possible construir una varietat local i invariant 2-dimensional dependent del paràmetre,  $W_\alpha^c$ , que actua de manera semblant a  $W^c$ .

**Teorema 4.3 (Shoshitaishvili [1972]).** Per a  $|\alpha| \approx 0$ , si suposem que se satisfan les condicions de genericitat vistes per a la bifurcació de Hopf en dimensió 2, llavors  $\dot{x} = f(x, \alpha)$  és localment topològicament equivalent a:

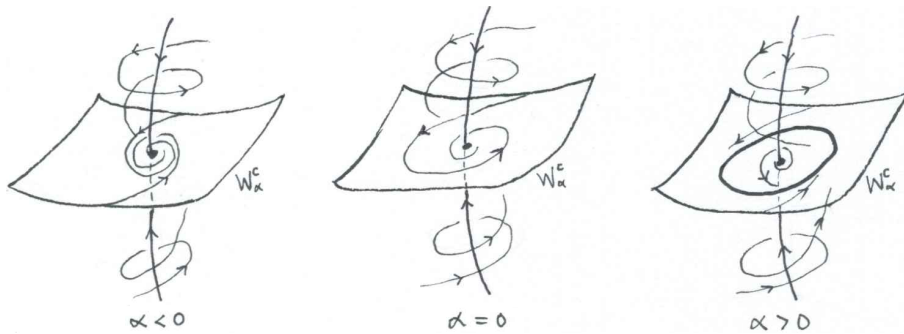
$$\begin{cases} \dot{z} = (\alpha + i)z - z^2\bar{z}, & z \in \mathbb{C}, \\ \dot{v} = -v, & v \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

on la primera equació coincideix amb la **forma normal de la bifurcació**.

El retrat de fase d'aquest sistema es pot representar com:



En aquesta expressió, la bifurcació de Hopf té lloc en el pla invariant  $v = 0$ . Tanmateix, el més destacable és que aquest comportament és substancialment el mateix que el del sistema (4.1) a la superfície atractora  $W_\alpha^c$ , representada per  $v = V(u)$  i que és tangent al pla  $v = 0$  en l'origen.



Aquest fet permet, doncs, entendre la dinàmica del sistema original a partir d'un altre que resulta més senzill d'estudiar.

A més, la construcció donada fins ara proporciona una generalització per a qualsevol dimensió arbitrària  $n \geq 3$ .

## Referències

- [1] CAMÍ, N. *Bifurcacions de Hopf i de Neimark-Sacker*. Treball final de grau, Universitat de Barcelona, 2020.