UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

PROCESSOS DE LÉVY

Autor: Oriol Zamora Font

Correu electrònic: oriol_zamora5@hotmail.com

Resum

L'objectiu del treball ha sigut demostrar els dos teoremes fonamentals de la teoria de processos de Lévy: el **teorema de Lévy-Khintchine** i la **descomposició de Lévy-Itô**. Aquests dos teoremes es poden interpretar com una classificació i descripció de les **lleis infinitament divisibles** i dels **processos de Lévy**, unes classes de lleis i de processos de gran importància ja que en la modelització de fenòmens aleatoris apareixen de manera natural sota certes hipòtesis raonables.

A continuació s'explica una possible motivació d'aquests dos teoremes a la vegada que s'enuncien resultats parcials obtinguts al llarg del treball.

Sigui $S = \{S(t), t \geq 0\}$ un procés estocàstic tal que $S(t)$ és el preu d'un determinat producte a l'instant t. En contextos simples de modelització financera es poden considerar les hipòtesis següents:

1. Els increments relatius de S en intervals de temps que no se superposin són independents.
2. La llei d'un increment relatiu de S en un interval de temps només depèn de la duració d'aquest interval.

Així doncs, sota aquestes hipòtesis, per a $0 \leq t_1 < t_2 = t_1 + h < t_3 = t_2 + h$, on $h > 0$, les variables:

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)} \quad \text{i} \quad \frac{S(t_3) - S(t_2)}{S(t_2)}$$

són independents i idènticament distribuïdes. Notem que llavors també són independents i idènticament distribuïdes les variables:

$$\frac{S(t_2)}{S(t_1)} \quad \text{i} \quad \frac{S(t_3)}{S(t_2)} \ ,$$

$$\log\left(S(t_2)\right) - \log\left(S(t_1)\right) \quad \text{i} \quad \log\left(S(t_3)\right) - \log\left(S(t_2)\right) \ . \tag{1.1}$$

Es pot aconseguir una expressió més adient dels increments relatius usant la igualtat:

$$\log(x+1) = x + o(x^2) \quad , \quad |x| < 1.$$

Fent una tria adequada de h és raonable suposar que $0 < \frac{S(t_2)}{S(t_1)} < 2$. Llavors:

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)} \approx \log\left(S(t_2)\right) - \log\left(S(t_1)\right) \ .$$

Això motiva la definició del **procés de preus logarítmics** $X := \{X(t), t \geq 0\}$ on:

$$X(t) := \log\left(S(t)\right) - \log\left(S(0)\right) \ ,$$

ja que l'increment relatiu de S en l'interval $[t_1, t_2]$ és, aproximadament, l'increment de X en l'interval $[t_1, t_2]$.

Usant l'observació feta en (1.1), les hipòtesis 1 i 2 sobre S es tradueixen en les hipòtesis sobre X següents:

1. Els increments de X en intervals de temps que no se superposin són independents.
2. La llei d'un increment de X en un interval de temps només depèn de la duració d'aquest interval.

Es diu que X és un **procés amb increments independents i estacionaris**.

Fixem ara $T \geq 0$. Notem que l'increment de X en $[0, T]$ és la suma dels increments de X de qualsevol partició de $[0, T]$. En particular, per a tot $n \geq 1$, dividint l'interval $[0, T]$ en n intervals de longitud T/n es té:

$$X(T) = \sum_{i=1}^{n} \left[X\left(\frac{iT}{n}\right) - X\left(\frac{(i-1)T}{n}\right) \right] = \sum_{i=1}^{n} Y_n(i) \ ,$$

on:

$$Y_n(i) := X\left(\frac{iT}{n}\right) - X\left(\frac{(i-1)T}{n}\right) \ .$$

Per les hipòtesis que hem formulat, les variables $Y_n(i)$ són independents i idènticament distribuïdes ja que corresponen a increments de X en intervals de temps que no se superposen i de la mateixa longitud.

Per tant, la llei de $X(T)$ es pot escriure com la llei de la suma d'un nombre arbitràriament gran de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes. És a dir, per a tot $n \geq 1$ existeixen n variables aleatòries independents idènticament distribuïdes $Y_n(i)$ tals que:

$$P_{X(T)} = P_{Y_n(1)+...+Y_n(n)} \ .$$

Es diu que la llei $P_{X(T)}$ és **infinitament divisible**. Preguntes naturals que ens podem fer respecte a aquesta propietat són:

- **Com expressar $P_{Y_n(1)+...+Y_n(n)}$ en funció de les $P_{Y_n(i)}$?**

  En el treball es demostra que si $Z(1), ..., Z(n)$ són variables independents, aleshores:

  $$P_{Z(1)+...+Z(n)} = P_{Z(1)} * ... * P_{Z(n)} \ ,$$

  on * és la convolució, una operació que es defineix sobre el conjunt de probabilitats a $\mathbb{R}$.

- **Quines lleis satisfan la propietat de ser infinitament divisible?**

  En el treball es demostra que la llei normal, la llei de Poisson i la llei de Poisson composta són exemples de lleis infinitament divisibles.

- **Com de forta és la propietat de ser infinitament divisible?**

  En el treball es demostra que les funcions característiques de les lleis infinitament divisibles no s'anul·len mai. Com a conseqüència d'aquest resultat, es pot prendre logaritme i arrel n-èsima d'aquestes funcions, fet de gran utilitat al llarg del treball.

També es demostra que tota llei infinitament divisible és el límit feble d'una successió de lleis de Poisson compostes, resultat de gran importància ja que és la base de la demostració del teorema de Lévy-Khintchine.

Finalment, pel teorema de Lévy-Khintchine, es demostra que si P és una probabilitat infinitament divisible la seva funció característica es pot escriure com:

$$\varphi_P(t) = \exp\left[iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)\mu(dx)\right] \ ,$$

on $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, i μ és una mesura a $\mathbb{R}$ que satisfà $\mu(\{0\}) = 0$ i la propietat:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge x^2\right)\mu(dx) < \infty$$

Es diu que μ és una **mesura de Lévy.**

A més, es pot demostrar la unicitat de la terna $\left(a, \sigma^2, \mu\right)$, fet que motiva que s'anomeni a $\left(a, \sigma^2, \mu\right)$ la **terna característica** de P.

Així doncs, el **teorema de Lévy-Khintchine** es pot interpretar com una classificació de les probabilitats infinitament divisibles mostrant que és una propietat prou forta perquè una probabilitat amb aquesta propietat quedi determinada per una única terna $\left(a, \sigma^2, \mu\right)$.

Fins aquí hem estudiat la variable aleatòria $X(T)$, però també ens interessa estudiar el procés X globalment. Per fer-ho es considera una altra hipòtesi raonable:

3. Fixat $t \geq 0$, amb probabilitat 1, no es produeixen salts en el procés S en l'instant t i, per tant, tampoc en el procés X.

Es diu que X és un **procés continu en probabilitat**.

Notem a més que $X(0) = 0$. Un procés que satisfaci les tres hipòtesis i aquesta última propietat es diu que és un **procés de Lévy**. Preguntes naturals que ens podem fer respecte a aquesta classe de processos són:

- **Quins processos són de Lévy?**

  En el treball es presenten els exemples següents: el moviment brownià, el procés de Poisson i el procés de Poisson compost. També s'enuncien caracteritzacions d'aquests exemples que s'usen per identificar els diferents processos que apareixen al llarg del treball.

- **Què podem dir dels salts d'un procés de Lévy?**

  En el treball es veu que donat un procés de Lévy existeix una modificació d'aquest procés que segueix sent un procés de Lévy, que té la mateixa llei i que, a més, les seves trajectòries són funcions càdlàg amb probabilitat 1. Aquest resultat és de gran utilitat per estudiar els salts d'un procés de Lévy.

En el treball es demostra que el procés que compta el nombre de salts de mida més gran que una certa constant estrictament positiva és un **procés de Poisson.**

Es demostra també que si els salts d'un procés de Lévy són acotats existeixen tots els moments de qualsevol variable del procés. Amb l'objectiu d'aplicar aquest resultat es planteja com construir a partir d'un procés de Lévy un nou procés de Lévy que tingui salts acotats. Això motiva que en el treball es defineixi la **integral de Poisson** i s'estudiïn les seves propietats.

- **Com de forta és la propietat de ser un procés de Lévy?**

  En el treball es demostra que un procés de Lévy és suficientment regular perquè la llei de tot el procés quedi caracteritzada també per una única terna $\left(a, \sigma^2, \mu\right)$ on $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, i μ és una mesura de Lévy.

  Finalment, es demostra la descomposició de Lévy-Itô que, a grans trets, afirma que tot procés de Lévy es descompon:

  - En una part **determinista**.
  - En la part de salts de mida més gran o igual que 1. En el treball es demostra que és un procés de Lévy, tot i que es pot demostrar que, a més, és un **procés de Poisson compost.**
  - En la part compensada de salts de mida més petita que 1. En el treball s'obté la **funció característica** de cada variable d'aquest procés.
  - En la part contínua del procés. Es demostra que és una variació d'un **moviment brownià.**

  El motiu pel qual la part de salts s'estudia de manera diferent si tenen mida més gran o igual que 1 o si tenen mida més petita que 1 és que el nombre de salts de mida arbitràriament petita pot ser infinit i això complica l'estudi d'aquesta segona part.

  L'estratègia que es segueix és considerar la part compensada de salts de mida entre $1/n$ i 1 i estudiar-ne el límit al fer créixer n. L'avantatge de considerar la part compensada de salts és que a part de ser un procés de Lévy centrat és una martingala. Es demostra que el límit en qüestió existeix usant que un cert espai de martingales amb una certa noció de convergència és complet. S'obté d'aquesta manera la part compensada de salts de mida més petita que 1.

Així doncs, la **descomposició de Lévy-Itô** es pot interpretar com una descripció dels processos de Lévy mostrant que les propietats que defineixen aquesta classe de processos són prou fortes perquè qualsevol procés d'aquesta classe es descompongui en aquestes quatre parts que s'han detallat.