CAUSALITAT A PARTIR DE LA GEOMETRIA DELS ESPAITEMPS

ROBERTO FORBICIA LEÓN

Resum. En aquest article s'estudia com la noció de causalitat sorgeix com a característica natural de la geometria dels espaitemps. S'hi presenta una descripció de l'estructura causal a través de les relacions de causalitat i s'investiguen les diferents propietats causals que poden tenir els espaitemps, tot introduint l'anomenada escala causal. Es posa especial atenció a la connexió entre causalitat i topologia, i en particular s'ofereix un resum d'algunes topologies per a espaitemps en què aquesta connexió és encara més evident.

1. Introducció

La noció de causalitat és inherent a la cognició humana. En el dia a dia experimentem contínuament relacions de causa-efecte que, de manera més o menys conscient, utilitzem per extreure conclusions i obtenir coneixement. No és gens estrany, doncs, que la causalitat hagi estat des de sempre un tema central tant en ciència com en filosofia.

En una primera aproximació al problema de descriure la causalitat, un s'adona que està intrínsecament lligada a l'existència del que en física s'anomena *fletxa del temps*. Aquesta determina una orientació temporal que permet discriminar entre els conceptes humans de futur i passat, i és la responsable del que vivim com el pas del temps. Per tant, qualsevol model matemàtic que pretengui descriure l'univers, o una part d'aquest, necessàriament ha de reflectir aquesta característica. I això ens porta a la pregunta següent: quines estructures matemàtiques són les més adequades per a descriure l'univers?

La resposta a aquesta qüestió passa per la noció d'*espaitemps*, introduïda per primer cop per H. Minkowski el 1908. La seva idea va ser unir en una sola entitat física les tres dimensions espacials amb la dimensió temporal, de manera que es preservés el caràcter especial d'aquesta última, és a dir, l'existència de la fletxa del temps. En aquest context, s'estudien els *esdeveniments* que tenen lloc a l'univers en una posició i un moment determinats i les relacions que s'estableixen entre ells.

El model d'espaitemps proposat per Minkowski, conegut com a *espaitemps de Minkowski*, proporciona unes eines que permeten desenvolupar de manera molt elegant la teoria de la relativitat especial (RE), publicada per A. Einstein el 1905. Es tracta, per tant, del marc matemàtic adequat per descriure totes aquelles lleis de la física que no tenen a veure amb la gravetat. La teoria de la RE va ser generalitzada anys més tard pel mateix Einstein per tal d'incloure també la descripció de fenòmens gravitatoris. El resultat és la teoria de la relativitat general (RG): una teoria geomètrica de l'espaitemps en què aquest és representat per una varietat de Lorentz de quatre dimensions sobre la qual la gravetat actua a través del tensor mètric. Així doncs, la RG vincula inevitablement la física amb la geometria diferencial i semiriemanniana.

Aquest article resumeix el contingut del treball [For20], seguint principalment les referències [O'N83], [HE73] i [Nab12].

2. L'espaitemps de Minkowski

L'objectiu d'aquesta secció és introduir l'espaitemps de Minkowski i descriure'n l'estructura causal.

2.1. **Definició i interpretació física.** En geometria semieuclidiana es defineix un *espai vectorial de Lorentz* com un parell (E, g) on E és un espai vectorial real de dimensió $n \geq 2$ i g és un producte escalar de Lorentz (un producte escalar amb índex $\nu = 1$). Cada element v d'un espai vectorial de Lorentz E es pot classificar en funció del seu *caràcter causal*. Així, diem que $v \in E$ és

- de *tipus temps* si $g(v, v) < 0$,
- *nul* o de *tipus llum* si $g(v, v) = 0$ i $v \neq 0$,
- de *tipus espai* si $g(v, v) > 0$ o $v = 0$.

Finalment, diem també que v és *causal* si no és de tipus espai.

Podem ara donar una definició formal per a l'espaitemps de Minkowski.

Definició 2.1. Es defineix l'*espaitemps de Minkowski* $\mathcal{M}$ com un parell $(\mathbb{R}^4, \eta)$ on η és un producte escalar de Lorentz. Els elements $p \in \mathcal{M}$ s'anomenen *esdeveniments*.

Correu electrònic: robertoforbicia@gmail.com.

La interpretació física de l'espaitemps de Minkowski es basa en la correspondència entre els esdeveniments de l'univers, caracteritzats per una coordenada temporal i tres d'espacials, i els esdeveniments matemàtics, entesos simplement com a elements de $\mathcal{M}$:

$$(ct, x, y, z) \longleftrightarrow (x^1, x^2, x^3, x^4),$$

on c és la velocitat de la llum en el buit. D'aquesta manera, per exemple, podem modelitzar la trajectòria en l'espaitemps d'una partícula física —la seva *línia de món*— en termes d'una corba diferenciable a $\mathcal{M}$. A algunes d'aquestes corbes se'ls pot assignar un caràcter causal de manera natural. En efecte, sigui $\gamma : I \to \mathcal{M}$ una corba diferenciable, direm que γ és de tipus temps/llum/espai si el seu vector tangent $\gamma'(t)$ és de tipus temps/llum/espai per a tot $t \in I$. Les corbes que aspirin a representar línies de món han d'estar sotmeses a les lleis de la física i en particular al postulat relativista que estableix que cap forma de matèria o energia pot moure's a una velocitat superior a c. En termes matemàtics, aquesta condició es tradueix en el fet que només les corbes de tipus temps o de tipus llum són vàlides per a descriure trajectòries físiques. Les primeres serveixen per a descriure les línies de món de partícules materials i les segones per a descriure les línies de món de fotons.

2.2. **Orientabilitat temporal i estructura causal.** El primer pas per a determinar l'estructura causal de l'espaitemps de Minkowski és definir-hi una orientació temporal. Es tracta, doncs, d'estudiar de quina manera es pot descriure matemàticament la fletxa del temps. Considerem el conjunt $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ de tots els elements de tipus temps de $\mathcal{M}$ i hi definim la relació següent:

$$v \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad \eta(v, w) < 0.$$

Es pot comprovar que $\sim$ és una relació d'equivalència amb exactament dues classes d'equivalència, fet que ens permet obtenir el resultat següent:

Proposició 2.2. *El conjunt $\mathcal{T}$ té dues components connexes.*

Fixant un element $v \in \mathcal{T}$, les dues components es poden expressar de la manera següent:

$$\mathcal{T}^+ := [v] = \{w \in \mathcal{T} \,|\, \eta(w, v) < 0\} \quad ; \quad \mathcal{T}^- := [-v] = \{w \in \mathcal{T} \,|\, \eta(w, v) > 0\}.$$

Direm que els elements de $\mathcal{T}^+$ són *dirigits al futur* i que els de $\mathcal{T}^-$ són *dirigits al passat*, tot determinant una *orientació temporal* per a $\mathcal{M}$. Així doncs, hem trobat una formulació matemàtica de les nocions de futur i passat. Ens interessa, però, estendre-la també a elements de tipus llum.

Considerem el conjunt $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ d'elements de tipus llum de $\mathcal{M}$. Per a qualsevol $w \in \mathcal{N}$, es té una (i només una) de les possibilitats següents:

$$\eta(w, v) < 0 \text{ per a tot } v \in \mathcal{T}^+ \quad \text{o bé} \quad \eta(w, v) < 0 \text{ per a tot } v \in \mathcal{T}^-.$$

D'aquesta manera s'arriba a un resultat anàleg al de la Proposició 2.2 i es conclou que el conjunt $\mathcal{N}$ també té dues components connexes. Igual que abans, etiquetem una de les components com a $\mathcal{N}^+$ i l'altra com a $\mathcal{N}^-$, corresponents al futur i al passat, respectivament (veure Figura 1).

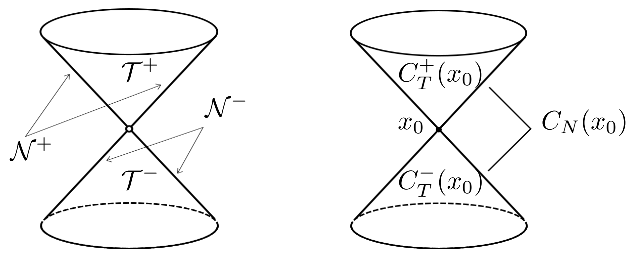

FIGURA 1. A l'esquerra es mostren les components connexes de $\mathcal{T}$ i $\mathcal{N}$. A la dreta hi tenim els cons de temps futur i passat i el con de llum per a l'esdeveniment x_0.

Un cop establertes les nocions de futur i passat, l'estructura causal de l'espaitemps de Minkowski es pot descriure completament en termes dels anomenats *cons de causalitat*. Concretament, es defineixen els cons de temps futur i passat, respectivament, com

$$\mathcal{C}_T^+(x_0) := \{x \in \mathcal{M} \,|\, x - x_0 \in \mathcal{T}^+\} \quad ; \quad \mathcal{C}_T^-(x_0) := \{x \in \mathcal{M} \,|\, x - x_0 \in \mathcal{T}^-\},$$

i els cons de llum futur i passat, respectivament, com

$$\mathcal{C}_N^+(x_0) := \{x_0\} \cup \{x \in \mathcal{M} \,|\, x - x_0 \in \mathcal{N}^+\} \quad ; \quad \mathcal{C}_N^-(x_0) := \{x_0\} \cup \{x \in \mathcal{M} \,|\, x - x_0 \in \mathcal{N}^-\}.$$

En tots dos casos la unió de les versions futures i passades dona lloc al *con de temps* $\mathcal{C}_T(x_0)$ i al *con de llum* $\mathcal{C}_N(x_0)$, respectivament. Finalment, l'estructura causal de $\mathcal{M}$ queda determinada afirmant que un esdeveniment $x_0 \in \mathcal{M}$ només pot afectar causalment esdeveniments $x \in \mathcal{C}_T^+(x_0) \cup \mathcal{C}_N^+(x_0)$ i només pot veure's afectat causalment per esdeveniments $x \in \mathcal{C}_T^-(x_0) \cup \mathcal{C}_N^-(x_0)$ (veure Figura 1).

3. Espaitemps generals

Per descriure l'estructura causal d'un espaitemps en presència de gravetat la RE és insuficient i cal entrar en els dominis de la RG. Com ja hem dit, en aquest marc la gravetat actua a través del tensor mètric d'una varietat semiriemanniana que representa l'espaitemps físic. La necessitat d'explicar la causalitat motiva que aquesta varietat sigui de Lorentz, de la mateixa manera que motivava per a l'espaitemps de Minkowski la tria d'un espai vectorial de Lorentz. De nou, confiem en la nostra experiència per fixar la dimensió d'aquesta varietat a quatre. Com que seguim pensant els espaitemps com a models de la història (o una part de la història) de l'univers (o una regió d'aquest), podem demanar que la varietat en qüestió sigui connexa. En efecte, si hi hagués una component disconnexa seria impossible arribar mai a saber-ne l'existència.

Arribats a aquest punt, però, ens hem de plantejar si amb les hipòtesis anteriors n'hi ha prou per a poder realitzar matemàticament la fletxa del temps i distingir així el futur del passat en cada punt de l'espaitemps. Sorgeix per tant la pregunta següent: són totes les varietats de Lorentz 4-dimensionals connexes orientables temporalment?

3.1. **Orientabilitat temporal per a varietats de Lorentz.** Formalment, es defineix una *varietat de Lorentz n-dimensional* com un parell (M, g) on M és una varietat diferenciable de dimensió n i g és un tensor mètric a M amb índex $\nu = 1$. Això vol dir que g assigna, de forma diferenciable, a cada $p \in M$ un producte escalar de Lorentz

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

en el seu espai tangent T_pM, tot convertint el darrer en un espai vectorial de Lorentz de dimensió n. Consegüentment, és possible assignar de manera natural un caràcter causal als vectors tangents a M i a les corbes diferenciables $\gamma : I \to M$ amb vectors tangents de caràcter causal constant. És fàcil comprovar que els resultats sobre l'orientabilitat temporal de $\mathcal{M}$ són generalitzables a qualsevol dimensió. Sabem, per tant, que és possible orientar temporalment cada un dels espais tangents T_pM de M, però: és possible fer-ho d'una manera *contínua*?

Una manera natural d'encarar aquest problema és utilitzar el fibrat tangent $TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM$ de M que, juntament amb una estructura diferenciable adequada (que no és la de la unió disjunta), ens permet agrupar tots els espais tangents a M en una sola varietat diferenciable. Tenim també una projecció, així com una identificació natural

$$\pi : TM \to M,\ (p, v) \mapsto p \quad ; \quad T_pM \cong \pi^{-1}(\{p\}) =: M_p.$$

Els elements de TM hereten un caràcter causal de la manera següent: assignem a $(p, v) \in TM$ el caràcter causal de $v \in T_pM$. Podem ara enunciar un resultat central en la descripció matemàtica de la causalitat. El lector interessat pot trobar-ne la demostració a [SW77], Capítol 2.

Teorema 3.1. *Sigui M una varietat de Lorentz connexa de dimensió n. Aleshores, el conjunt $\mathcal{T}$ d'elements de tipus temps de TM és una subvarietat oberta de TM amb una o dues components connexes.*

Definició 3.2. Es diu que una varietat de Lorentz M connexa i de dimensió n és *orientable temporalment* si $\mathcal{T} \subset TM$ té dues components connexes. Una *orientació temporal* per a M és un etiquetatge arbitrari de les components de $\mathcal{T}$ com a $\mathcal{T}^+$ (que anomenem *futur*) i $\mathcal{T}^-$ (que anomenem *passat*). En aquest cas, diem que M està *orientada temporalment.*

Una orientació temporal M determina de manera contínua una orientació temporal a cada T_pM:

$$\mathcal{T}_p^+ := \mathcal{T}^+ \cap\ M_p \quad , \quad \mathcal{T}_p^- := \mathcal{T}^- \cap\ M_p,$$

que s'estén de manera natural als vectors de tipus llum donant lloc a dues components $\mathcal{N}_p^+$ i $\mathcal{N}_p^-$, com en el cas de $\mathcal{M}$. Igual que abans, direm que un vector causal $v \in T_pM$ és *dirigit al futur* (resp. *dirigit al passat*) si $v \in \mathcal{T}_p^+ \cup \mathcal{N}_p^+$ (resp. $v \in \mathcal{T}_p^- \cup \mathcal{N}_p^-$). De la mateixa manera, direm que una corba diferenciable causal $\gamma : I \to M$ és *dirigida al futur* (resp. *dirigida al passat*) si el seu vector tangent $\gamma(t)$ és dirigit al futur (resp. al passat) per a tot $t \in I$.

És important remarcar que l'orientabilitat temporal d'una varietat de Lorentz és independent de la seva orientabilitat com a varietat perquè involucra l'estructura semiriemanniana i no només la diferenciable.

Així, una varietat diferenciable M pot admetre dues mètriques de Lorentz g_1 i g_2 de manera que (M, g_1) sigui orientable temporalment i (M, g_2) no ho sigui. La figura següent exemplifica aquesta situació:

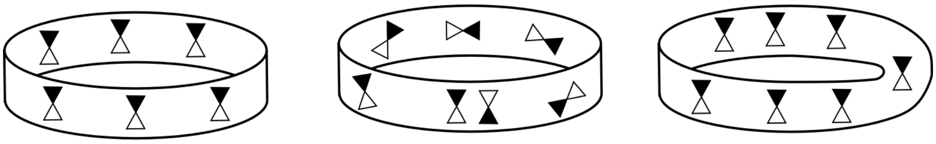

FIGURA 2. D'esquerra a dreta: una mètrica de Lorentz orientable temporalment sobre la banda orientable $S^1 \times \mathbb{R}$, una mètrica de Lorentz no orientable temporalment sobre la mateixa banda orientable i una mètrica de Lorentz orientable temporalment sobre la banda (no orientable) de Möbius.

3.2. **Definició i interpretació física.** Podem ja presentar formalment la noció matemàtica d'espaitemps.

Definició 3.3. Un *espaitemps* és una varietat de Lorentz (M, g) 4-dimensional, connexa i orientada temporalment. Els elements $p \in M$ s'anomenen *esdeveniments*.

Notem que l'espaitemps de Minkowski és efectivament un espaitemps en el sentit d'aquesta definició, ja que qualsevol espai vectorial de Lorentz es pot pensar com una varietat de Lorentz amb l'estructura diferenciable estàndard de $\mathbb{R}^n$ i definint el tensor mètric a partir del producte escalar.

En aquest marc més general, continuem aspirant a descriure les línies de món de les partícules físiques en termes de corbes sobre l'espaitemps matemàtic. Així, les línies de món de partícules materials seran ara descrites per corbes de tipus temps dirigides al futur mentre que les dels fotons seran descrites per corbes geodèsiques nul·les (de tipus llum) dirigides al futur. Això últim encaixa amb la idea intuïtiva que tenim de les geodèsiques com a generalització de les rectes a varietats amb curvatura.

Havent determinat de manera consistent una direcció al futur i una direcció al passat per a cada esdeveniment $p \in M$, podem ara estudiar quins esdeveniments de M poden veure's afectats causalment per p i quins poden afectar causalment p, determinant així l'estructura causal de M. En termes matemàtics, el problema de determinar quins esdeveniments a M poden estar relacionats causalment es redueix a estudiar quins esdeveniments a M es poden unir mitjançant una corba causal.

4. Relacions de causalitat

Per tal de descriure l'estructura causal d'espaitemps arbitraris és convenient introduir les anomenades *relacions de causalitat.* Així, sigui M un espaitemps i $p, q \in M$, definim les relacions següents:

$$\begin{aligned} p \ll q &\iff \text{existeix una corba de tipus temps dirigida al futur de } p \text{ a } q, \\ p < q &\iff \text{existeix una corba causal dirigida al futur de } p \text{ a } q. \end{aligned}$$

Es pot comprovar que totes dues relacions són transitives. En el primer cas, es diu que *p precedeix cronològicament q* i en el segon que *p precedeix causalment q*. Com sempre, utilitzem $p \leqslant q$ per indicar que $p < q$ o $p = q$. Veiem, doncs, que les relacions de causalitat no són més que la formalització matemàtica de les nostres nocions usuals de causalitat.

Definició 4.1. Sigui $p \in M$, definim el *futur cronològic de p* i el *futur causal de p*, respectivament, com

$$I^+(p) := \{q \in M |\, p \ll q\} \quad , \quad J^+(p) := \{q \in M |\, p \leqslant q\}.$$

Les definicions anteriors tenen duals en què es canvia "futur" per "passat", "$+$" per "-" i "$p \ll q$" (resp. $p \leqslant q$) per "$q \ll p$" (resp. $q \leqslant p$). Els resultats que afecten les versions en passat s'obtenen dels seus anàlegs en futur simplement invertint l'orientació temporal i, per tant, ens centrarem només en els darrers. Com a exemple, podem pensar en l'espaitemps de Minkowski, per al qual es té

$$I^+(p) = \mathcal{C}_T^+(p) \quad , \quad J^+(p) = \mathcal{C}_T^+(p) \cup \mathcal{C}_N^+(p).$$

Fixem ara la nostra atenció en les característiques topològiques dels futurs cronològics i causals.

Proposició 4.2. *Per a cada $p \in M$, el conjunt $I^+(p)$ és obert a M.*

Aquest resultat és molt important ja que estableix un primer vincle entre causalitat i topologia. El següent, relaciona l'interior, la frontera i la clausura dels futurs cronològics i causals i confirma la connexió subjacent entre les estructures causal i topològica. Tots dos es poden trobar a [O'N83], Capítol 14.

Proposició 4.3. *Per a cada $p \in M$, se satisfà:*

$$\mathrm{Int}(J^+(p)) = I^+(p), \quad J^+(p) \subset \overline{I^+(p)}, \quad \overline{J^+(p)} = \overline{I^+(p)} \quad i \quad \partial J^+(p) = \partial I^+(p).$$

5. Condicions de causalitat

La condició d'orientabilitat temporal per a una varietat de Lorentz 4-dimensional connexa no és suficient per excloure comportaments causals patològics. Per exemple, res no exclou la possibilitat que un espaitemps M admeti corbes de tipus temps tancades dirigides al futur. És clar que això obre la porta a hipotètics viatges en el temps que donen lloc a tot tipus de paradoxes lògiques. És el cas de la *paradoxa de l'avi*, que s'establiria si algú viatgés al passat i matés un dels seus ascendents, evitant així el propi naixement i conseqüentment el viatge en el temps que desencadena la mort.

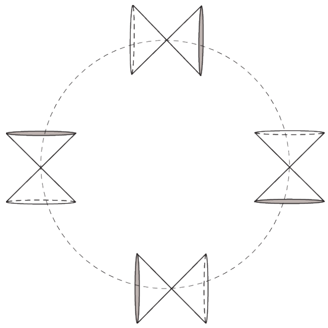

Figura 3. Representació d'una corba de tipus temps tancada dirigida al futur.

Per tal d'excloure comportaments causals no desitjats, és necessari afegir hipòtesis complementàries als espaitemps. Això dona lloc a les anomenades *condicions de causalitat*, que determinen de forma jerarquitzada quant "físic" és un espaitemps i conformen l'*escala causal*.

La primera condició a demanar a un espaitemps M és que hi hagi almenys algun esdeveniment p que no es precedeixi cronològicament a ell mateix, és a dir, tal que $p \not\ll p$. En aquest cas es diu que M és *no totalment viciós*.

Les condicions següents van en la línia que ja hem anticipat: excloure la possibilitat que M admeti corbes de tipus temps tancades (resp. corbes causals tancades). En aquest cas, es diu que la *condició de cronologia* (resp. *causalitat*) es compleix a M i que M és *cronològic* (resp. *causal*). Fixem un moment la nostra atenció en un espaitemps M on falla la condició de cronologia. En una hipotètica realització física de M, seria possible viatjar en el temps? La resposta és que no en el sentit usual que donem a l'expressió "viatjar en el temps", és a dir, viatjar de manera instantània a qualsevol esdeveniment futur o passat. Sí que seria possible un viatge en el temps subjecte al requeriment físic que $v < c$ i només entre els esdeveniments connectats per corbes tancades de tipus temps. El conjunt d'aquests esdeveniments rep el nom de *conjunt de violació de cronologia de M* i es pot demostrar que sempre és obert a M i que és no buit si M és compacte. Aquests dos resultats tornen a posar de manifest la relació existent entre causalitat i topologia. A més, el segon sembla suggerir que l'espaitemps físic no pot ser compacte mentre que el primer ens dona més pistes sobre com seria l'hipotètic viatge en el temps en un espaitemps on falla la condició de cronologia. Imaginem que un observador es troba en una corba de tipus temps tancada, el fet que el conjunt de violació de cronologia sigui obert implica que l'observador en qüestió podria desviar-se i modificar lleugerament la seva línia de món sense abandonar el viatge en el temps.

A part d'excloure la possibilitat de tenir corbes causals tancades, també seria raonable demanar que no hi hagi corbes causals que retornin arbitràriament a prop del seu punt d'origen. O que no hi hagi corbes causals que passin arbitràriament a prop d'altres corbes causals que retornin arbitràriament a prop de l'origen de la primera. Això motiva les anomenades *condició discriminant* i *condició de causalitat forta*, que donen lloc als espaitemps *discriminants* i als *fortament causals*.

No obstant, fins i tot la condició de causalitat forta segueix permetent certs comportaments no desitjables. Per tal de tenir escenaris més realistes físicament, seria convenient treballar amb espaitemps per als quals les condicions de causalitat es preservessin sota petites pertorbacions del tensor mètric. Volem evitar, per exemple, tenir un espaitemps fortament causal, però tal que una petita variació del tensor mètric n'alteri l'estructura causal inicial tot introduint una corba de tipus temps tancada. La condició que assegura que això no passi és la *condició de causalitat estable*.

L'última de les condicions de causalitat que introduirem és la *condició d'hiperbolicitat global*. És la condició més restrictiva i difícil de motivar en termes de la discussió que hem dut a terme fins ara, tot i que sí que admet una caracterització senzilla: un espaitemps M és *globalment hiperbòlic* si i només si és fortament causal i el conjunt $J^+(p) \cap J^-(q)$ és compacte per a tot $p, q \in M$. Una vegada més, queda palès el vincle entre causalitat i topologia. Es creu que qualsevol espaitemps físic ha de ser globalment hiperbòlic ja que, a grans trets, la condició d'hiperbolicitat global és necessària per assegurar que l'univers, tal com el descriu la RG, sigui determinista.

Com hem dit anteriorment, les condicions de causalitat ordenen els espaitemps sobre la base de les seves propietats causals, donant lloc a l'escala causal.

Globalment hiperbòlic $\Rightarrow$ Establement causal $\Rightarrow$ Fortament causal $\Rightarrow$ Discriminant $\Rightarrow$ Causal $\Rightarrow$ Cronològic $\Rightarrow$ No totalment viciós

6. Topologies alternatives

Fins ara hem assumit en tot moment que els espaitemps estan dotats de la topologia que defineix la seva estructura diferenciable, i que anomenarem *topologia de varietat*. Des d'un punt de vista matemàtic no hi ha a priori cap motiu per assumir el contrari, però al mateix temps no hi ha cap motivació física per treballar amb aquesta topologia. Hem vist també que existeix una relació entre les estructures causal i topològica d'un espaitemps i ens interessa ara esbrinar si es poden definir topologies alternatives per als espaitemps que potenciïn aquesta connexió. Tot plegat, se'ns plantegen les preguntes següents:

- Es poden definir topologies més "físiques" per als espaitemps?
- És possible obtenir l'estructura causal d'un espaitemps a partir de la seva topologia?
- És possible definir una topologia en un espaitemps només a partir de la seva estructura causal?

El 1966, E. C. Zeeman va donar una resposta positiva a les dues primeres preguntes, tot introduint l'anomenada *topologia fina* per a l'espaitemps de Minkowski [Zee66]. Es tracta d'una topologia tècnicament complicada (ja que, per exemple, no satisfà el primer axioma de numerabilitat), però amb un gran significat físic que, en particular, permet deduir l'estructura causal de $\mathcal{M}$. La topologia fina va ser posteriorment generalitzada de forma natural a espaitemps generals per R. Göbel, donant lloc a les *topologies de Zeeman*. Aquestes, però, seguien presentant alguns inconvenients, fet que va motivar S. W. Hawking, A. R. King i P. J. McCarthy a proposar l'anomenada *topologia de camins* [HKM76]. Destaquen principalment dues millores d'aquesta topologia respecte de les anteriors. En primer lloc, satisfà el primer axioma de numerabilitat i és per tant molt més fàcil treballar-hi. I en segon lloc, el grup d'homeomorfismes d'un espaitemps M amb aquesta topologia coincideix amb el grup de difeomorfismes conformes de M i, per tant, la topologia incorpora tant l'estructura diferenciable com l'estructura causal de M.

Totes aquestes topologies, però, es defineixen a partir de la topologia de varietat i, per tant, no ofereixen cap resposta a la tercera pregunta. Ja al 1959, però, A. D. Alexandrov va respondre-hi afirmativament introduint l'anomenada *topologia d'Alexandrov* [Ale59], que es defineix en un espaitemps M com la topologia generada pels conjunts $I^+(p) \cap I^-(q)$ per a tot $p, q \in M$. Tanmateix, aquesta topologia no té significat físic, així que presenta els mateixos inconvenients que van motivar Zeeman a introduir la topologia fina.

La consideració simultània de les tres preguntes va portar D. T. Fullwood a combinar les idees d'Alexandrov i les de Hawking, King i McCarthy, donant lloc a la *topologia de Fullwood* [Ful92]. Aquesta es defineix, per a un espaitemps M, com la topologia generada pels conjunts

$$(I^+(p) \cap I^-(q)) \cup \{q\} \cup (I^+(q) \cap I^-(r)), \qquad \text{per a } p, q, r \in M.$$

Es tracta, doncs, d'una topologia definida a partir de l'estructura causal i que, a més, presenta tot el significat físic i els avantatges que ja incorporava la topologia de camins.

Referències

[Ale59] A. D. Alexandrov. The philosophical content and meaning of relativity. *Voprosy Filosofii (The Problems of Philosophy)*, (1):67–81, 1959.

[For20] R. Forbicia. Emergence of causality from the geometry of spacetimes. *Treball final de grau, Universitat de Barcelona*, 2020.

[Ful92] D. T. Fullwood. A new topology on space-time. *Journal of Mathematical Physics*, 33(6):2232–2241, 1992.

[HE73] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time.* Cambridge University Press, London-New York, 1973. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.

[HKM76] S. W. Hawking, A. R. King, and P. J. McCarthy. A new topology for curved space-time which incorporates the causal, differential, and conformal structures. *J. Mathematical Phys.*, 17(2):174–181, 1976.

[Nab12] G. L. Naber. *The geometry of Minkowski spacetime*, volume 92 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2012. An introduction to the mathematics of the special theory of relativity.

[O'N83] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. , New York, 1983.

[SW77] R. K. Sachs and H. H. Wu. *General relativity for mathematicians.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 48.

[Zee66] E. C. Zeeman. The topology of Minkowski space. *Topology*, 6:161–170, 1966.